



BYZAN
2010

Sonderdruck aus

Falko Daim · Jörg Drauschke (Hrsg.)

Byzanz – das Römerreich im Mittelalter

Teil 2, 1 Schauplätze

Römisch-Germanisches
Zentrum
Forschungsinstitut für
Vor- und Frühgeschichte

R G Z M



Gesamtredaktion: Kerstin Kowarik (Wien)
Koordination, Schlussredaktion: Evelyn Bott, Jörg Drauschke,
Reinhard Köster (RGZM); Sarah Scheffler (Mainz)
Satz: Michael Braun, Datenshop Wiesbaden; Manfred Albert,
Hans Jung (RGZM)
Umschlaggestaltung: Franz Siegmeth, Illustration · Grafik-Design,
Bad Vöslau

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in
der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische
Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

© 2010 Verlag des Römisch-Germanischen Zentralmuseums

Das Werk ist urheberrechtlich geschützt. Die dadurch begründeten
Rechte, insbesondere die der Übersetzung, des Nachdrucks, der
Entnahme von Abbildungen, der Funk- und Fernsehsendung, der
Wiedergabe auf photomechanischem (Photokopie, Mikrokopie)
oder ähnlichem Wege und der Speicherung in Datenverarbei-
tungsanlagen, Ton- und Bildträgern bleiben, auch bei nur auszugs-
weiser Verwertung, vorbehalten. Die Vergütungsansprüche des
§ 54, Abs. 2, UrhG. werden durch die Verwertungsgesellschaft
Wort wahrgenommen.

DAS BAUWERK ALS »AISTHETON SOMA«¹

EINE NEUINTERPRETATION DER HAGIA SOPHIA

IM SPIEGEL ANTIKER VERMESSUNGSLEHRE UND ANGEWANDTER MATHEMATIK

VORBEMERKUNG: DAS »RAUMWUNDER«

»Alle die Bauglieder, die sich da – es ist kaum zu glauben – hoch droben ineinander gefügt gegenseitig die Schwebel halten und nur auf ihre nächste Umgebung stützen, leihen dem Werk eine einzigartige, ganz ausgezeichnete Harmonie, lassen aber das Auge des Betrachters nicht lange an einer Stelle, sondern jeder Einzelteil zieht den Blick ab, um ihn schnellstens auf sich zu lenken. Rasch wandert unausgesetzt das Auge hin und her, da sich der Betrachter nicht im Stande fühlt auszuwählen, was er mehr von all den anderen bewundern soll. Indessen mögen die Menschen auch so nach allen Seiten hin ihr Augenmerk richten und voll Staunen über alles ihre Brauen zusammenziehen, es übersteigt doch ihre Kräfte, die Kunst ganz zu verstehen, und so entfernen sie sich stets von dort ganz benommen von der überwältigenden Größe des Eindrucks«².

Treffender als mit den Worten Prokops von Caesarea – Historiker im Auftrag des Kaisers Justinian – ist die verblüffende Wirkung wohl kaum zu beschreiben, den die Architektur der Hagia Sophia³ bis heute auf ihre Besucher ausübt: Sie ist Ergebnis eines Vexierspiels zwischen der klaren Geometrie ihrer baulichen Struktur und deren gleichzeitiger visueller Entmaterialisierung durch ein flächiges Dekorationssystem⁴, das die Tektonik des Baus vollständig zu negieren scheint. Erst anhand des Grundrissplans lässt sich die eigentliche Logik der Konstruktion erfassen und damit auch das komplizierte Verhältnis von Tragen und Lasten als fragiles Gleichgewicht im räumlichen Gefüge nachvollziehen (**Abb. 1**).

Die gewaltige Kirche wurde anstelle der im Nika-Aufstand zerstörten Basilika Theodosios' II. in nur knapp sechs Jahren – zwischen dem 23. Februar 532 und der Einweihung am 27. Dezember 537 – von Kaiser Justinian errichtet und zeigt in ihrem ungewöhnlichen Entwurf die architektonische Idee, einen gerichteten basilikalen Grundriss mit der Figur eines Kuppel überwölbten Zentralraums zu verschmelzen (**Abb. 2**)⁵. Zentrum des auf eine Gesamtlänge von ungefähr 80 m in ost-westliche Richtung gedehnten Innenraums ist die große und in ihrem Scheitel 56 m hohe, frei schwebende Pendentifkuppel, deren mächtige Pfeiler im Grundriss ein imaginäres Quadrat definieren. Doch schon die gerichtete Form dieser massigen Stützen macht deutlich, dass ihre Funktion über das Tragen der Kuppel hinaus auch dem in Längsrichtung gestreckten Hauptraum dient, um die Kräfte der im Osten und Westen anschließenden Halbkuppeln ableiten zu können. Auch die Konchen folgen der longitudinal gedehnten Halle und liegen sich nicht, wie üblich bei achteckig organisierten Zentralbauten, diagonal gegenüber⁶, sondern sind exzentrisch unter den Halbkuppeln angeordnet. Durch diese Verschiebung werden sie aus ihrer geometrischen Bindung gelöst und zu-

¹ Heron, *Definitiones* 135, 7.

² Prokop, *Bauten I* 1, 47-49.

³ Wichtigste Literatur zur Hagia Sophia s. den Beitrag von R. H. W. Stichel in diesem Band.

⁴ Die farbige Marmorverkleidung negiert alle tektonischen Zusammenhänge; so gibt es nur in der Horizontalen einheitliche Farb-

streifen, während durchgehende vertikale Linien vollständig vermieden werden.

⁵ Stanzl, *Längsbau*.

⁶ Wie z.B. bei der fast zeitgleich errichteten Kirche der Hll. Sergios und Bakchos in Istanbul: Svenshon / Stichel, *Beobachtungen*.



Abb. 1 Hagia Sophia, Innenansicht, Gewölbe (Foto).

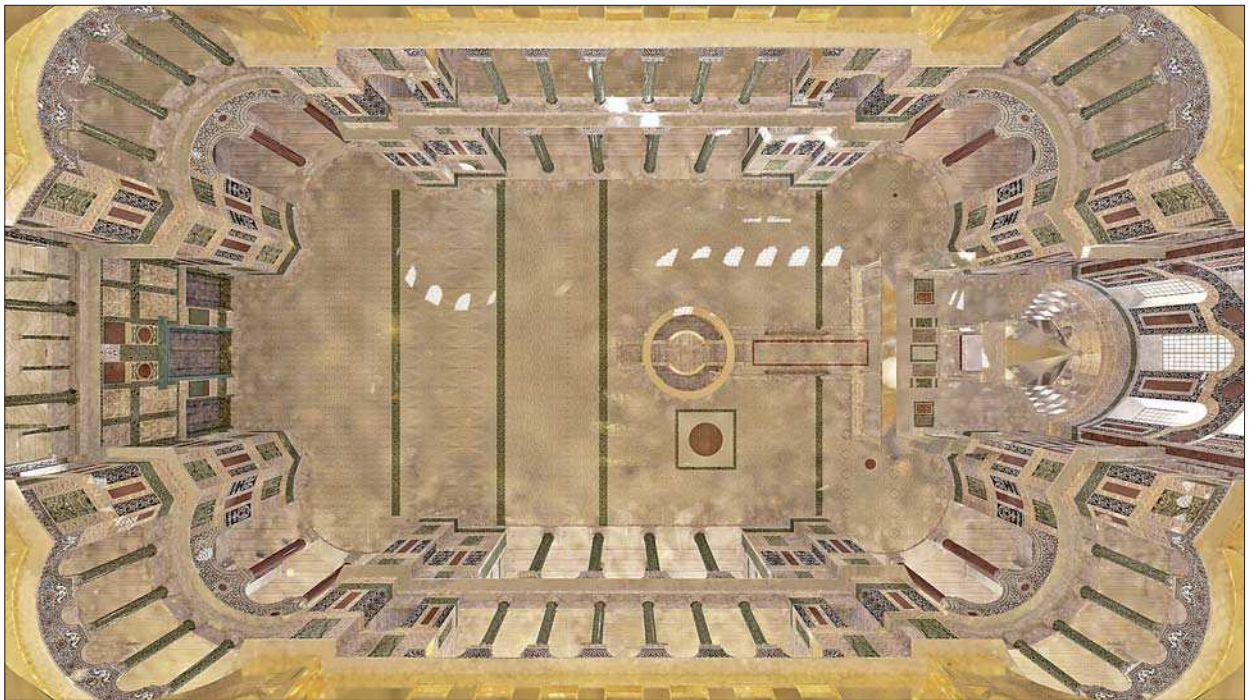


Abb. 2 Hagia Sophia, Blick aus der Kuppel (Computermode).ll).

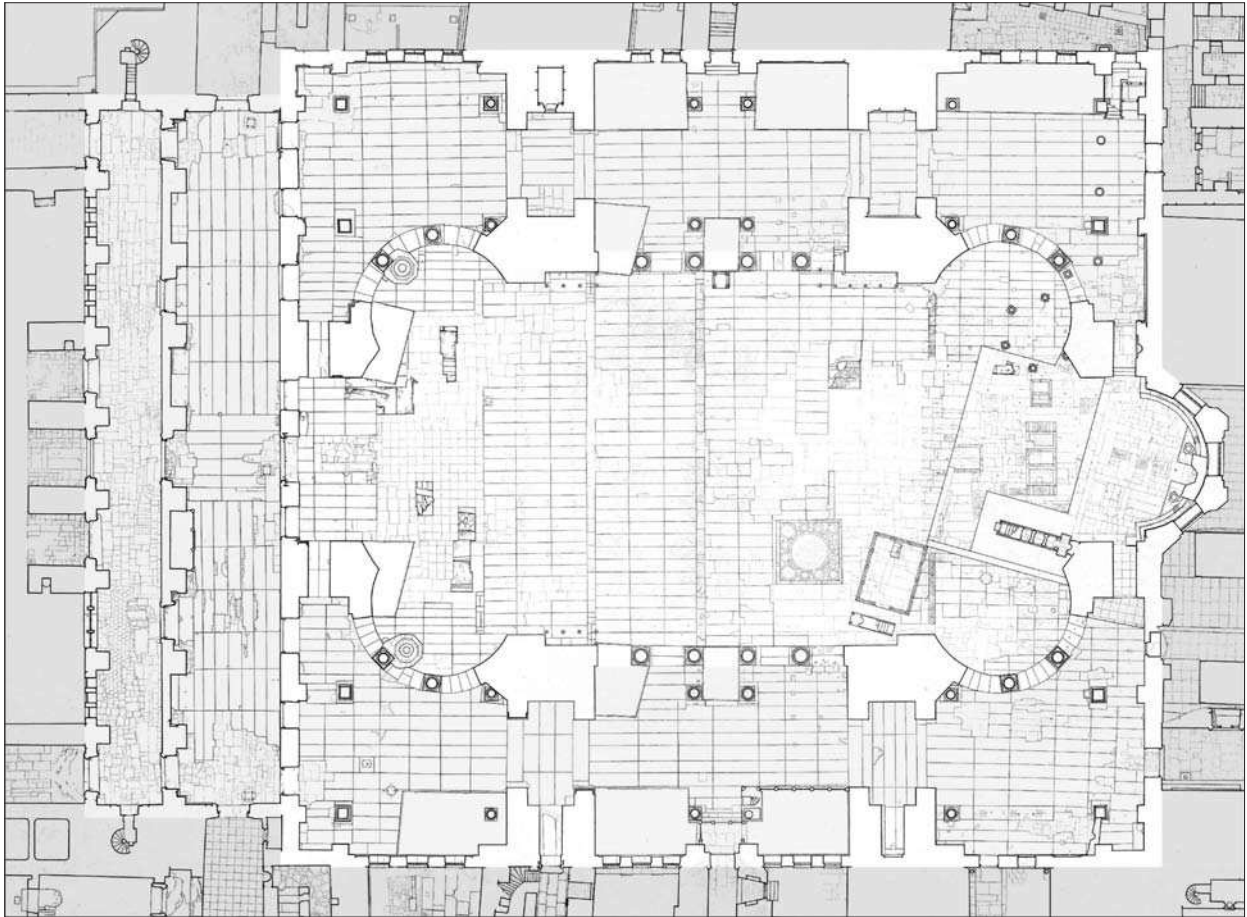


Abb. 3 Hagia Sophia, Grundriss.

gleich mittels Drehung ihrer Öffnungen stärker zum Mittelschiff orientiert, sodass ihre neue Lage und Ausrichtung im Osten und Westen weitere räumliche Kristallisationspunkte erzeugt. In Verbindung mit dem Apsiskreis führt diese Konfiguration im östlich gelegenen Altarbereich zum Grundrissbild einer Art von Trikonchos, dessen Form jedoch außen gar nicht in Erscheinung tritt, weil sie von einer weiteren Raumschicht, den Seitenschiffen, eingefasst wird (**Abb. 3**).

Diese zweigeschossigen breiten Hallen flankieren den gesamten Mittelraum, werden – der äußeren Kontur von Konchen und Halbkuppeln folgend – im Osten und Westen geweitet, sodass sie den riesigen Naos wie ein Polster umschließen und ihn auf dem Plan gleichsam als »Haus im Hause« erscheinen lassen. Dabei erweitern sie den gerichteten Innenraum zu einem fast quadratischen Umriss und verleihen der Gesamtanlage die kompakte Erscheinungsform eines nahezu symmetrisch konzipierten Zentralbaus. Die hierfür notwendige Tiefe der Seitenschiffe resultiert wiederum aus konstruktiven Erfordernissen, da die Lasten der zentralen Kuppel im Norden und Süden nicht über Halbkuppelschalen, sondern durch Strebepfeiler abgeleitet werden, deren Ausdehnung nur geringfügig kleiner dimensioniert ist als die in Längsrichtung wirkenden Tragsysteme. Über große Bögen mit den Hauptpfeilern verbunden, bewirken diese aber zugleich auch eine Verschränkung des longitudinalen Hauptraums mit einer quer gelagerten Struktur, die aber weitgehend nur im Grundrissplan zur Geltung kommt, weil ihre Wirkung im Raum allein schon durch die

zwischen den Kuppelpfeilern eingestellte Reihe monumentaler Säulen sowie die eingezogene Empore unmittelbar wieder aufgehoben wird. Den Seitenschiffen verleiht diese Überlagerung dagegen ihre charakteristische Gestalt, denn das Strebepfeilersystem rhythmisiert und gliedert die lang gestreckten Hallen, sodass sie in je drei kompakte Kompartimente mit besonderen Raumqualitäten und damit auch eigenständigen Funktionsmöglichkeiten geschieden werden.

Diese beispielhaft ausgewählten Einzelbeobachtungen lassen erkennen, auf welch tief greifende Weise das architektonische Konzept der Hagia Sophia von der Durchdringung der beiden gegensätzlichen Raumtypen – Zentral- und Longitudinalbau – bestimmt wird. Das mag auch der Grund dafür sein, dass sich schon die Grundrissdarstellung des Entwurfs als ein – auf den ersten Blick – schwer nachvollziehbares Gefüge unterschiedlicher geometrischer Figuren erweist, deren dreidimensionaler Aufbau wiederum äußerst komplizierte räumliche Verschneidungen nach sich zieht. Vor allem in der Gewölbezone führt dies zu Situationen, bei denen sich z.B. Konglomerate aus einfachen Tonnen-, Kreuzgratgewölben mit eingeschnittenen Halbkuppelschalen bilden, die mit Hilfe von zweidimensionalen Projektionen kaum noch darstellbar sind⁷. Aber auch die formale Gestaltung des Kuppelaufbaus selbst wird von dem asymmetrischen Tragsystem aus Halbkuppeln und Strebepfeilern bestimmt. Während im Inneren der Kirche das architektonische Bild einer allseitig auf gleichmäßig dimensionierten Bögen und sphärischen Dreiecken ruhenden Halbkugel dominiert, sorgt hinter dieser »Fassade« eine vom inneren Eindruck völlig unabhängige Konstruktion gewaltiger Pfeiler und Bögen dafür, dass die Illusion solch vollkommener Symmetrie auch tatsächlich im Gleichgewicht bleibt⁸.

Gerade dieser in seiner Gesamtheit so außergewöhnliche Zuschnitt der Hagia Sophia scheint ein Grund dafür zu sein, dass sich ihre Geometrie und damit die für den Bauvorgang so wichtige Grundlage ihrer Bemessung bis heute einer plausiblen Erklärung entzogen hat. Keiner der zahlreichen Untersuchungen, die sich diesem Thema gewidmet haben, ist es bisher gelungen, Lösungen anzubieten, die auch mit dem technischen Denken jener Zeit kompatibel wären⁹. Sicher hat die breite architekturgeschichtliche Rezeption des römischen Architekturtheoretikers Vitruv dazu beigetragen, dass entscheidende für Planung, Bau und vor allem für das Verständnis antiker Architektur verantwortliche Wissensfelder bis heute unberücksichtigt geblieben sind. Obwohl in seinem Werk, das in der Antike nur eine geringe Wirkung entfalten konnte¹⁰, die unterschiedlichsten Rezepturen für den Entwurf idealtypischer, modularisierter Architektur präsentiert werden, bleibt doch die Frage nach den mathematischen und technischen Grundlagen ihrer Transformation ins reale Bauwerk, d.h. die praktische Umsetzung auf der Baustelle mit all ihren Erfordernissen weitgehend unbeantwortet.

Eine Ursache für dieses Desiderat mag darin liegen, dass in der Forschung bis heute die Vorstellung zu finden ist, antike Architekturentwürfe wären in erster Linie nach harmonischen Proportionen, mit Zirkel und Lineal »rein geometrisch« auf der Grundlage regelmäßiger Figuren entwickelt worden, deren mathemati-

⁷ Die komplizierten Verschneidungen konnten erst im Rahmen der 3D-Modellierung nachvollziehbar dargestellt werden (Beitrag von L. O. Grobe, O. Hauck und A. Noback in diesem Band).

⁸ Zur asymmetrischen Lastabtragung der Kuppel: Mainstone, *Sophia* 166f.

⁹ Studien und Analysen zum geometrischen Entwurf der Hagia Sophia: Bei keiner dieser Arbeiten wurde die umfangreich überlieferte technologische Literatur der Antike, insbesondere die Werke Herons von Alexandria, berücksichtigt. Deshalb behalf man sich mit weitgehend vom Bauwerk losgelösten und bisweilen auch abwegigen geometrischen Figuren, um den Grund- und Aufriss der Hagia Sophia »entschlüsseln« zu können. Alle Unter-

suchungen zeigen aber deutlich, dass ohne Kenntnisnahme der antiken mathematischen Quellen keine Annäherung an das Vermessungssystem des Bauwerks möglich ist: Dehio, *Proportionsgesetz* 17f. fig. 81-82. – Jouven, *Rythme* 39-41. – Jouven, *Ich-nographie*. – Maillard, *Sainte-Sophie*. – Tavano, *Unità*. – Trinci, *Sofia*. – Junecke, *Proportionen*. – Krustup, *Anthemios*. – Meyer-Christian, *Sophia*. – Pantelic, *Sophia*. – Humpert / Schenk, *Stadtplanung* 266f. – Hoffmann, *Sophia*. – Hoffmann / Theocharis, *Entwurf*. – Hoffmann, *Entwurf*. – Bei der Zusammenstellung der Liste war mir R. H. W. Stichel behilflich.

¹⁰ Für eine Zusammenstellung der Quellen über Vitruvs Nachleben in der Antike vgl. Schuler, *Vitruv* 12-44.

sche Perfektion dem Bauwerk zugleich eine besondere Würde und Bedeutung verleihen sollte¹¹. Auch die jüngste Studie zum Entwurf der Hagia Sophia bleibt diesem Denkbild mit einer besonders zugespitzten These verpflichtet, nach der alle Fluchten und Achsen des Baus anhand eines geometrischen Systems zu ermitteln seien, »ohne dass nur ein einziger Werkmann zu Maßband und Messlatte greifen müsste«¹². Ganz im Gegensatz zu dieser sehr unrealistischen Interpretation zeigt das umfangreich überlieferte technologische Schrifttum des Altertums¹³, dass sich die Praxis des Planens und Bauens auf der Basis zahlreicher, methodisch weitgehend einheitlich ausgearbeiteter Regelwerke vollzogen hat. Deren gemeinsame Grundvoraussetzung war ein rein numerisch orientiertes Vermessungswesen (geodaisia), dem ein umfassendes, von der angewandten griechischen Mathematik (logistike) entwickeltes System rationaler Zahlenverhältnisse zur Verfügung stand, das anscheinend sogar im Konflikt mit der exakten Geometrie der ihr zugrunde liegenden regelmäßigen Figuren lag¹⁴. Dieses Wissen war jedoch notwendig, um einem architektonischen Entwurf erst den objektivierten und rational fassbaren maßlichen Rahmen zu geben, der aus dem gedanklichen Konstrukt ein reales plan- und berechenbares Bauwerk entstehen lassen konnte. Wie sonst hätte man auch die unterschiedlichen Planungs- und Bauabschnitte, Gewerke und Materialberechnungen miteinander zu vernetzen und in eine sinnvolle und vor allem beherrschbare zeitliche Abfolge zu bringen vermocht, um ein solches Vorhaben, das durch seine gewagte Konstruktion und gewaltige Größe so viele Unwägbarkeiten mit sich brachte, in so exorbitant kurzer Zeit von nur sechs Jahren erfolgreich errichten können? Nur auf diese Weise konnte eine Baustelle von der Größenordnung der Hagia Sophia, bei der so vielschichtige Aufgabenfelder wie Länder übergreifender Transport von Baustoffen und Abbau derselben aus den unterschiedlichen Steinbrüchen, die Anfertigung von Montagekonstruktionen, wie Gerüste und Hebewerke, und die Organisation des Baubetriebs bewältigt werden. Umso notwendiger ist es, das Bauwerk selbst als originäre Quelle des Wissens seiner Zeit wahrzunehmen und in den Kontext der hierzu verfügbaren technologischen Schriften des Altertums zu stellen.

DIE PLANER: ANTHEMIOS VON TRALLEIS UND ISIDOR VON MILET

»Der Kaiser nun scheute keine Ausgaben, er machte sich mit Eifer ans Werk und berief sämtliche Fachleute aus der ganzen Welt. Anthemios von Tralleis, mit Abstand der glänzendste Ingenieur nicht nur der Gegenwart, sondern auch der Vergangenheit, unterstützte den kaiserlichen Eifer, indem er den Bauleuten ihre Aufgaben zuwies und die Pläne für die neuen Schöpfungen entwarf; mit ihm arbeitete zusammen ein weiterer Ingenieur namens Isidor aus Milet, auch sonst ein kluger Kopf und wert, einem Kaiser Justinian zu dienen«¹⁵.

¹¹ Stellvertretend hierfür die neuesten Arbeiten: Birnbaum, Didy-ma. – Senseney, Kos. – Terrien, Architecture. – Auch hier werden ausschließlich die bedeutungsgeschichtlichen und philosophischen Aspekte antiker Mathematik rezipiert, wobei die vermeintlich sinnstiftenden Bezüge in einer vom Bauwerk abgekoppelten Interpretationsebene geknüpft werden. Dabei erscheint die in Anspruch genommene Mathematik auf das Zeichenhafte von Zahlen und geometrischen Figurationen reduziert, für deren antike Anwendung in der Mathematikgeschichte jedoch keinerlei Nachweise zu finden sind und deren Brauchbarkeit für die konkrete maßliche Festlegung eines Bauwerks stark zu bezweifeln ist.

¹² Hoffmann / Theocharis, Entwurf 415.

¹³ Meißner, Fachliteratur.

¹⁴ So wird beispielsweise das regelmäßige Fünfeck sowohl bei den Babyloniern als auch bei Heron von Alexandria mittels des bekannten pythagoräischen Dreiecks mit den Seitenlängen 3, 4, 5 berechnet. Dadurch lassen sich zwar seine Strecken rational beziffern, seine Geometrie wird hierbei allerdings »deformiert«: Heron, Metrika I 18. – Herz-Fischler, Number 108f. – Bruins / Rutten, Suse 23f. pl. 1-2. – Robson, Mathematics 48. – Allgemein zur antiken Mathematik: Gericke, Mathematik.

¹⁵ Prokop, Bauten I 1, 24-26.

Die Auseinandersetzung mit der Hagia Sophia und mit ihren Erbauern, Anthemios von Tralleis und Isidor von Milet, führt nun aber auf direktem Weg zu den Texten, die für das Verständnis dieses außergewöhnlichen Baus notwendig sind. Durch sie eröffnet sich auch ein besonderer Blick auf die Qualifikation von Architekten und Ingenieuren jener Zeit, da von beiden bekannt ist, dass sie nicht nur auf dem praktischen Gebiet ihres Berufes als ausgewiesene Fachleute galten, sondern vor allem auch in theoretischen Themenfeldern bewandert waren¹⁶. Über ihre weiteren baulichen Aktivitäten gibt es so gut wie keine Nachrichten, außer dem Hinweis Prokops, dass die beiden Ingenieure – allerdings nur beratend – an der Planung eines Staudamms in der Festungsstadt Dara an der mesopotamischen Ostgrenze des Römischen Reiches beteiligt waren¹⁷.

Dem gegenüber zeichnen die Überlieferungen ein wesentlich differenzierteres Bild von ihren Kenntnissen vor allem auf dem Gebiet der theoretischen Grundlagen und Methoden in den unterschiedlichen Disziplinen des spätantiken Ingenieurwesens. Beide scheinen in Alexandria studiert zu haben, denn ihre Namen tauchen als Widmungen in Schriften des Mathematikers und Philosophen Eutokios von Askalon auf, der ebenfalls am dortigen Museion gelernt und wohl auch gelehrt haben soll¹⁸. Von Anthemios ist bekannt, dass er sich unter anderem mit Brennsiegeln beschäftigte und eine Schrift unter dem Titel »Peri Paradoxon Mechanematon« verfasst hat¹⁹. Aber auch über Isidors theoretische Arbeiten gibt es verschiedene Hinweise: So wird berichtet, dass er sich mit den Schriften Euklids und Archimedes' beschäftigte und hierzu wohl auch eigene Beiträge verfasst hat²⁰. Im Zusammenhang mit Planung und Bau der Hagia Sophia verdient eine weitere Nachricht Eutokios' besondere Aufmerksamkeit, nach der Isidor einen Kommentar zu der Schrift »Über Gewölbe« (kamarika) des Ingenieurs und Mathematikers Heron von Alexandria verfasst haben soll²¹. Vermutlich entwickelte Isidor auch in diesem Kontext ein zirkelartiges Instrument zum Zeichnen von Parabeln, um die grafische Darstellung von Kegelschnitten als Umrisskurven der unterschiedlichen Gewölbeformen geometrisch besser konstruieren zu können.

DAS FUNDAMENT DER PLANUNG: DIE VERMESSUNGSLEHRE HERONS VON ALEXANDRIA

»Die Geodäsie ist eine Wissenschaft, welche die Größen und Figuren in den sinnlichen Körpern [aisthetois somasi] teilt und zusammenlegt. [...] Sie nimmt die Figuren vor nicht vollkommen oder exakt, dadurch, daß eine körperliche Materie zugrunde liegt; so mißt sie einen Getreidehaufen als einen Kegel, runde Brunnen als zylindrische Figuren und nach hinten verjüngte Körper als stumpfe Kegel. Und wie die Geometrie die Arithmetik benutzt, so benutzt sie die Logistik. Als Geräte benutzt sie [...] Dioptren, Lineale, Richtschnüre, Winkelmaße und dergleichen [...]«²².

Mit Heron von Alexandria kommt ein wichtiger Autor ins Spiel, dessen Schriften in Wissensgebiete führen, zu denen – neben einer Fülle unterschiedlicher Themen aus technisch-mechanischen Bereichen – vor allem die mathematischen Methoden und praktischen Anwendungsbereiche des antiken Vermessungswesens,

¹⁶ Hunger, Literatur 229f. – Downey, Architects. – Meek, Architect 218f. – Meißner, Fachliteratur 310-317. – Darmstaedter, Anthemios.

¹⁷ Prokop, Bauten II, 3.

¹⁸ »This brings me to the second item of historical interest in the new text: Elias' reference to a course in Aristotelian logic given by Eutocius. This Eutocius can be nobody else than the well-known mathematician, the commentator of Apollonius and Archimedes and a personal friend of Ammonius. His career as a philosopher cannot have been sensational, since no other traces

of it have survived, and it may have been a short one; but as the obvious surmise is that he taught at Alexandria, his professorate probably fills the lacuna between Ammonius and Olympiodorus« Westerink, Elias 129.

¹⁹ Huxley, Anthemios.

²⁰ Hunger, Literatur 229f. – Downey, Architects 111. – Cameron, Isidore 103; 119ff. – Netz / Noel, Archimedes 80f.

²¹ Downey, Architects 113. – Cameron, Isidore 120.

²² Heron, Definitiones 135, 7.

der Geodaisia, gehören²³. Über das Leben dieses einflussreichen Mannes selbst ist nichts bekannt, sodass die Datierung seines Wirkens lange Zeit zu den »meist umstrittenen Problemen« der Mathematikgeschichte gehörte²⁴. Erst dem Mathematikhistoriker O. Neugebauer gelang es mit der Untersuchung »Über eine Methode zur Distanzbestimmung Rom – Alexandria [...]«, die in Herons Dioptra hierbei angegebene Mondfinsternis zu identifizieren (13. März 62) und sich damit einer Fixierung seiner Lebenszeit in das erste nachchristliche Jahrhundert plausibel anzunähern²⁵.

Diesen spärlichen biografischen Informationen aber steht ein breit gefächertes Werk praxisorientierter Handbücher unterschiedlichen technologischen Inhalts gegenüber, das in einigen Teilen von Heron selbst verfasst, im Wesentlichen aber unter seinem Namen vom 1. Jahrhundert n. Chr. bis in das byzantinische Mittelalter weiter verbreitet worden ist. Sowohl die nachweisliche Rezeption seines Werks als auch die zahlreichen antiken Erwähnungen²⁶ lassen seinen Namen als Synonym eines für lange Zeit gültigen Standardwissens erscheinen²⁷. So nennt ihn Pappos von Alexandria im 4. Jahrhundert zusammen mit Eratosthenes, Philon und Nikomedes einen der älteren Mathematiker, der außerdem eine eigene Schule geprägt haben soll, in der die Wissenschaft der Mechanik – systematisch ausdifferenziert – gelehrt worden ist²⁸. Ebenfalls im 4. Jahrhundert stellt ihn Gregor von Nazianz in eine Reihe mit Euklid und Ptolemaios²⁹; Proklos Diadochos zitiert im 5. Jahrhundert auszugsweise Herons Euklidkommentar, und Eutokios von Askalon beruft sich im 6. Jahrhundert auf bestimmte Berechnungsmethoden des Alexandriners³⁰.

Neben den Schriften zur Mechanik, Katoptrik³¹, den Abhandlungen zu Wasser und Dampf betriebenen Automaten³² und weiteren praktischen Anleitungen ist es vor allem die sogenannte Vermessungslehre (metrika)³³ zusammen mit Texten zur Geometrie (geometrica)³⁴ und Körpervermessung (stereometrica)³⁵, die im Zusammenhang mit dem Bau der Hagia Sophia besonderes Interesse verdienen. Hierbei wird aus mathematikhistorischer Perspektive die »Metrika«, überliefert in einer erst gegen Ende des 19. Jahrhunderts entdeckten Handschrift in Istanbul, als originaler Text Herons angesehen, der eine Fülle systematischer Berechnungsmethoden unterschiedlicher geometrischer Figuren (Polygone etc.) beinhaltet. Die dort behandelten Aufgaben lassen sich als »rechnende Geometrie« bezeichnen³⁶, weil Heron, im Gegensatz zur rein konstruierenden und alle zahlenmäßigen Berechnungen ausschließenden Geometrie Euklids, die praktischen Erfordernisse der Geodäsie in den Vordergrund rückt und »sich nicht scheut, die Lösung einer geometrischen Aufgabe mit bestimmten Zahlen herbei zu führen«³⁷.

Mit dieser Praxis verbindet ihn aber eine Tradition, die bis in altbabylonische Zeit zurückreicht. Denn bereits im 2. Jahrhundert v. Chr. wurden zahlreiche geometrische Probleme der Vermessung, wie z.B. das inkom-

²³ Cantor, Vorlesungen 380ff. – Tittel, Heron 1010ff.

²⁴ Neugebauer, Methode 21.

²⁵ Neugebauer, Methode 21-24. – Zur Datierungsdiskussion in Auswahl: Cantor, Vorlesungen 363-368 datiert Heron in das 1. Jahrhundert v. Chr. – Hammer-Jensen, Heron, plädiert für eine späte Datierung in das 3. Jahrhundert. – Drachmann und Krafft (Drachmann, Heron. – Krafft, Kunst) bestätigen O. Neugebauers Datierung. – Ausführliche Literatur zu diesem Thema: Asper, Dionysius.

²⁶ Tittel, Heron 1069f.

²⁷ »Der letzte geodätische Schriftsteller blieb Heron allerdings für lange Zeit. Euklid und Heron waren nachgerade ihrer Persönlichkeit beinahe entkleidet worden. Sie waren Titel von Schulbüchern geworden, welche auch zu anderen Völkern drangen, die in anderen Sprachen als in der griechischen dachten und redeten. Mochten in diesen »Euklid« der Theoretiker, in diesen »Heron« der Praktiker Dinge eingedrungen sein, an welche der lebende Euklid, der lebende Heron nie gedacht hatte, für die Nachkommen blieb es der »Euklid«, der »Heron« Cantor, Vorlesungen 381f.

²⁸ Tittel, Heron 1004. – Downey, Pappus. – »The mechanicians of Heron's school say that mechanics can be divided into a theoretical and manual part; the theoretical part is composed of geometry, arithmetic, astronomy and physics, the manual of work in metals, architecture, carpentering and painting and anything involving skill with the hands. The man who had been trained from his youth in the aforesaid sciences as well as practised in the aforesaid arts, and in addition has a versatile mind, would be, they say, the best architect and inventor of mechanical devices« Thomas, Pappus 615.

²⁹ Gregor, Reden VII (227).

³⁰ Tittel, Heron 1004.

³¹ Heron, Mechanik.

³² Heron, Druckwerke.

³³ Heron, Metrika.

³⁴ Heron, Geometrica.

³⁵ Heron, Stereometrica.

³⁶ Cantor, Vorlesungen 381.

³⁷ Tittel, Heron 1005.

mensurable Verhältnis zwischen Quadratseite und -diagonale mit Hilfe sehr genauer Näherungswerte beschrieben und berechnet³⁸. Herons Bedeutung liegt also darin, dass er als erster Mathematiker des Altertums diese Art der angewandten Mathematik und praktischen Geometrie systematisiert und in seinen Handbüchern gewissermaßen »kodifiziert« hat. Das Wissen um diese Transferleistung scheint offenkundig bis in die Spätantike fortgedauert zu haben, denn noch im 6. Jahrhundert weiß Cassiodor Senator Herons diesbezügliche Verdienste mit dem Hinweis zu würdigen, dass die Geometrie von den Chaldäern (Babyloniern) entdeckt, von den Ägyptern in die Vermessungskunst übertragen und schließlich von Heron in einem geschriebenen Regelwerk zum Gebrauch für Studenten zusammengefasst worden ist³⁹.

Doch die hohe Wertschätzung, die Heron sowohl in der Antike als auch durch die mathematikgeschichtliche Forschung des 19. und beginnenden 20. Jahrhunderts erfahren hat, konnte es nicht verhindern, dass seine Schriften in aktuellen Diskussionen leider kaum noch eine Rolle spielen. Während ihn Moritz Cantor vor ungefähr 100 Jahren noch gleichberechtigt neben Euklid stellte und an seiner Bedeutung für die Überlieferung der »angewandten« Mathematik keinerlei Zweifel ließ⁴⁰, zeigt stellvertretend das Urteil B. L. van der Waerden die völlig veränderte, moderne Wahrnehmung Herons: »Interessant sind die großen Ideen der Menschheit, nicht die Verwässerung dieser Ideen in Schulbüchern und Aufgabensammlungen. Seien wir froh, dass wir die Meisterwerke eines Archimedes und Apollonios haben und trauern wir nicht den zahlreichen verlorenen Rechenbüchlein von der Art des Heron nach«⁴¹. Diese Negativrezeption, die sich ebenso in der aktuellen lexikalischen Literatur niederschlägt⁴², scheint wohl auch dafür verantwortlich zu sein, dass Herons praxisorientierte Handbücher, die seit Beginn des 20. Jahrhunderts vollständig in deutscher und seit den 60er Jahren teilweise auch in englischer Übersetzung vorliegen, von der baugeschichtlichen Forschung bisher vollständig übersehen worden sind⁴³.

THEORETISCHE GRUNDLAGEN

Hérons »kamarika« und die Pendentifkuppel der Hagia Sophia

»Nun ist auch der Zwischenraum zwischen den Bogen selbst mit schönen Werken gefüllt. Denn wo die nach den Regeln der Kunst auseinandertretenden Bogen die leere Luft gezeigt hätten, steigt dreieckig und möglichst weit überkragend die Wand zu solcher Höhe empor, daß die benachbarten Dreiecke die Arme

³⁸ Vogel, *Mathematik* 34.

³⁹ Cassiodor, *Variae* III, 52. – »As to geometry, now, it is recorded that the Chaldaean first discovered it, since they are the most intelligent and painstaking race of men. [...] Later, the Egyptians, not dissimilar in their burning spirit, transferred geometry to the measurement of land [...]. For, in the time of Augustus, the Roman world was divided into fields, and registered by census, so that no one should be unsure of the property which he held with the duty of paying tax. Heron, a writer of mensuration, reduced this to a written doctrine, so that the student can learn from his reading what he must fully demonstrate to the naked eye [...]« Cassiodor, *Selected Variae* 72. – Der hier von Cassiodor als Heron metricus bezeichnete Autor wird von der mathematikhistorischen Forschung allerdings nicht mit Heron von Alexandria identifiziert: »Um das Jahr 500 erzählt Cassiodorus von dieser Vermessung [des Römischen Reiches, ca. 37–20 v. Chr.] und sagt dabei, ein Schriftsteller Heron metricus habe sich an ihrer Redaktion beteiligt. Nun ist allerdings richtig, daß die Handschriften nicht Heron, sondern Iron oder Yron

überliefern, es ist auch richtig, daß Heron nirgendwo als metricus bezeichnet wird, wenn er auch [...] ein Werk metrika verfaßt hat [...]« Cantor, *Vorlesungen* 366. Es stellt sich hierbei jedoch die Frage, ob die für das historisch so schwer greifbare »Phänomen« Heron durchaus zutreffende Charakterisierung Cassiodors für unseren Autor so zwingend abgelehnt werden kann, zumal von Cassiodor, aufgrund der zeitlichen Entfernung von einem halben Jahrtausend, nicht unbedingt zu erwarten ist, dass er über die genauen Lebenszeiten und Werke Herons informiert war.

⁴⁰ Siehe oben Anm. 27.

⁴¹ Waerden, *Wissenschaft* 457.

⁴² Folkerts, *Heron* 481.

⁴³ Gerade in den Untersuchungen zur Bauplanung und -vermessung, die ja bekanntlich ein breites Feld in der antiken Bauforschung einnehmen, vermisst man die Auseinandersetzung mit den umfangreichen und sehr nützlichen Informationen Herons. Beispielhaft hierfür: DiskAB, *Bauplanung* (ohne einen einzigen Hinweis).

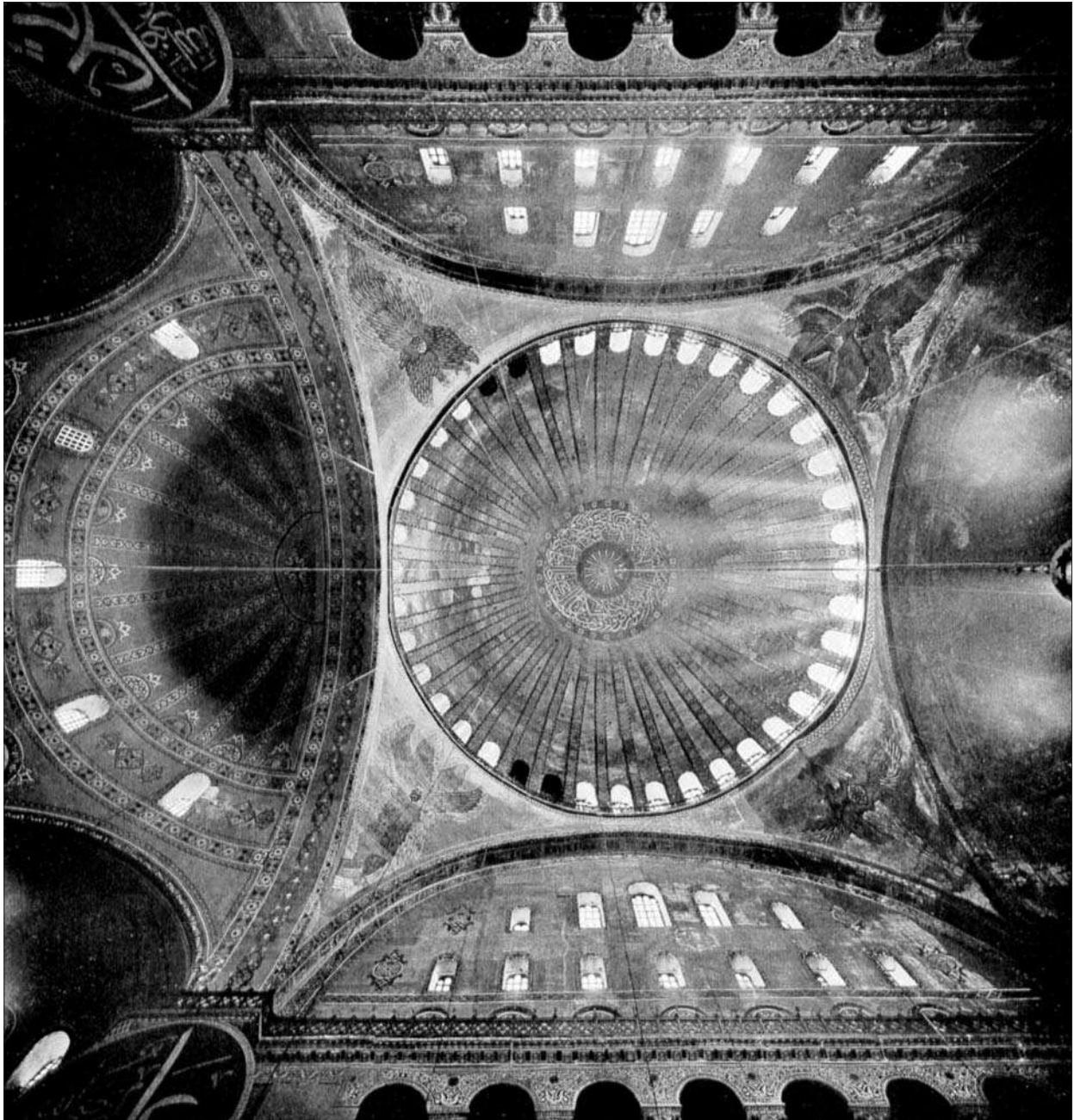


Abb. 4 Hagia Sophia, Kuppel (Foto).

zu einem Kreis zusammenschließen. [...] Ein steinernes, allseits zu einem schönen Kreis geformtes Gesims hält sämtliche Bogenrücken zusammen, auf dem dann auch die halbkugelförmige Kuppel aufsitzt und den die Scheitelpunkte der Bogen ringsum berühren«⁴⁴.

Der Hinweis Eutokios' auf Isidors Kommentar zur Gewölbelehre Herons (kamarika) führt unmittelbar zu einem Schlüsseltext, durch den ein weitergehendes Verständnis für die mathematischen Grundlagen und damit auch für die Planung der geometrisch und konstruktiv anspruchsvollsten Bereiche der Hagia Sophia – das komplizierte Gewölbesystem mit seiner zentralen Pendentifkuppel – möglich ist (Abb. 4). Eine eigene

⁴⁴ Paulus Silentarius, Sophia 465-484.

Schrift unter diesem Titel selbst ist nicht überliefert, aber in der sogenannten Stereometrica, einer wohl byzantinischen Bearbeitung heronischer Texte⁴⁵, befindet sich u.a. auch eine Aufgabensammlung mit zahlreichen Gewölbeberechnungen, deren Methoden bereits in Herons Vermessungslehre niedergelegt sind. Alle in der »Stereometrica« versammelten Berechnungen zeichnen sich durch ihre besondere Praxisnähe aus, denn es werden vornehmlich die Volumina und Oberflächen unterschiedlichster Bauteile und Architekturelemente gemessen, um belastbare Angaben beispielsweise über das Materialaufkommen für ein Bauvorhaben machen zu können.

Da die Aufgaben in erster Linie der Datenermittlung für den praktischen Baubetrieb dienen, finden sich deshalb auch nur Lösungen, die ausschließlich mit Hilfe rationaler Zahlen und Brüche dargestellt werden können, auch wenn hierfür die Verwendung ungenauer, den tatsächlichen geometrischen Streckenverhältnissen widersprechender Näherungswerte notwendig ist⁴⁶. Insbesondere bei den Beispielen aus der Gewölbelehre wird dieses Thema brisant, weil hier fast ausnahmslos mit den Formeln der Kreis-, Kugel- und Zylinderberechnungen des Archimedes operiert wird, die ja allesamt von der irrationalen Konstante π bestimmt sind und damit für die griechische Mathematik »nicht ausdrückbare« (arrhetos) und deshalb unbrauchbare Lösungswerte erzeugen würden⁴⁷. Gerade mit dem von Archimedes zwischen dem Intervall von $3 \frac{10}{71}$ und $3 \frac{1}{7}$ positionierten Näherungswert von π ⁴⁸ wären die Berechnungen der aufgeführten Musteraufgaben jedoch so kompliziert und aufwändig geworden, dass sie ihren Nutzen für das Bauwesen sicher verloren hätten.

Genau aus diesem Grunde, »da [...] diese Zahlen für Messungen nicht bequem sind«, empfiehlt Heron in seiner Vermessungslehre (»Metrika«) den Gebrauch des etwas unschärferen Wertes $3 \frac{1}{7}$ ($= 22/7$), der ihm für die Berechnung aller Kreisaufgaben wesentlich praktikabler erscheint⁴⁹. Beim größten Teil aller Beispiele, denen die Formen Kreis, Zylinder und Kugel – in der praktischen Anwendung also Gewölbe und Kuppeln – zugrunde liegen, werden nun Radius- und Durchmesserwerte gewählt, die entweder mit dem Nenner 7 des Näherungswertes von π übereinstimmen oder ein Vielfaches dieser Zahl sind. Die Wahl dieser Maße hat den Effekt, dass bei all den betreffenden Aufgaben, ob es sich nun um Flächen-, Umfang- oder Volumenberechnungen handelt, der Nenner 7 gekürzt werden kann, wodurch fast immer ganzzahlige und dadurch gewissermaßen »standardisierte« Ergebnisse entstehen. Bei der Ermittlung des Kreisumfangs nach der Formel $U = D \cdot 22/7$ ergeben sich z.B. folgende elegante Lösungen, die aufgrund der einfachen Prozedur auch leicht im Kopf zu errechnen sind: Die Durchmesser $D = 7$ bzw. $D = 14$ erzeugen durch schlichtes Kürzen des Nenners die Umfangmaße $U = 22$ bzw. $U = 44$ ⁵⁰ (**Abb. 5**).

Ähnliches gilt für die Berechnung der Kreisfläche, für die Heron gleich mehrere Lösungswege anbietet. Eine dieser Varianten, bei der die Kenntnis des Durchmessers vorausgesetzt wird, lautet: $A = D^2 \cdot 11/14$ und führt durch den Einsatz der genannten Werte wiederum zu einem rationalen Ergebnis für die Kreisfläche: $D = 7$ bzw. $D = 14$, woraus $A = 38\frac{1}{2}$ bzw. $A = 154$ folgt⁵¹. Aber auch bei den Beispielen mit Kugeln und Zylindern dominieren diese Maße, sodass es leicht nachvollziehbar ist, welchen Vorteil ein in dieser Weise systematisiertes Vorgehen bei der Berechnung solch komplizierter Gebäudeteile haben konnte. Dabei ist es auch durchaus vorstellbar, dass es eigens für den antiken Baubetrieb angefertigte Tabellen dieser Rechenergebnisse – vergleichbar den umfangreichen metrischen Umrechnungslisten in Herons »Geometrica« – gegeben haben könnte⁵².

⁴⁵ Heron, Stereometrica. – Tittel, Heron 1063.

⁴⁶ Siehe oben Anm. 14.

⁴⁷ »Es hat aber das göttliche Erzeugte einen Umlauf, welchen eine vollkommene Zahl umfasst, das menschliche aber eine Zahl, in welcher, als der ersten, Vermehrungen [...] alles gegeneinander messbar und ausdrückbar darstellen« Platon, Res Publica VIII. 546 b.

⁴⁸ Thomas, Thales 321.

⁴⁹ Heron, Metrika I, 25.

⁵⁰ Siehe oben Anm. 49.

⁵¹ Heron, Geometrica 17: Von den Kreisfiguren.

⁵² Heron, Geometrica 4; 23.

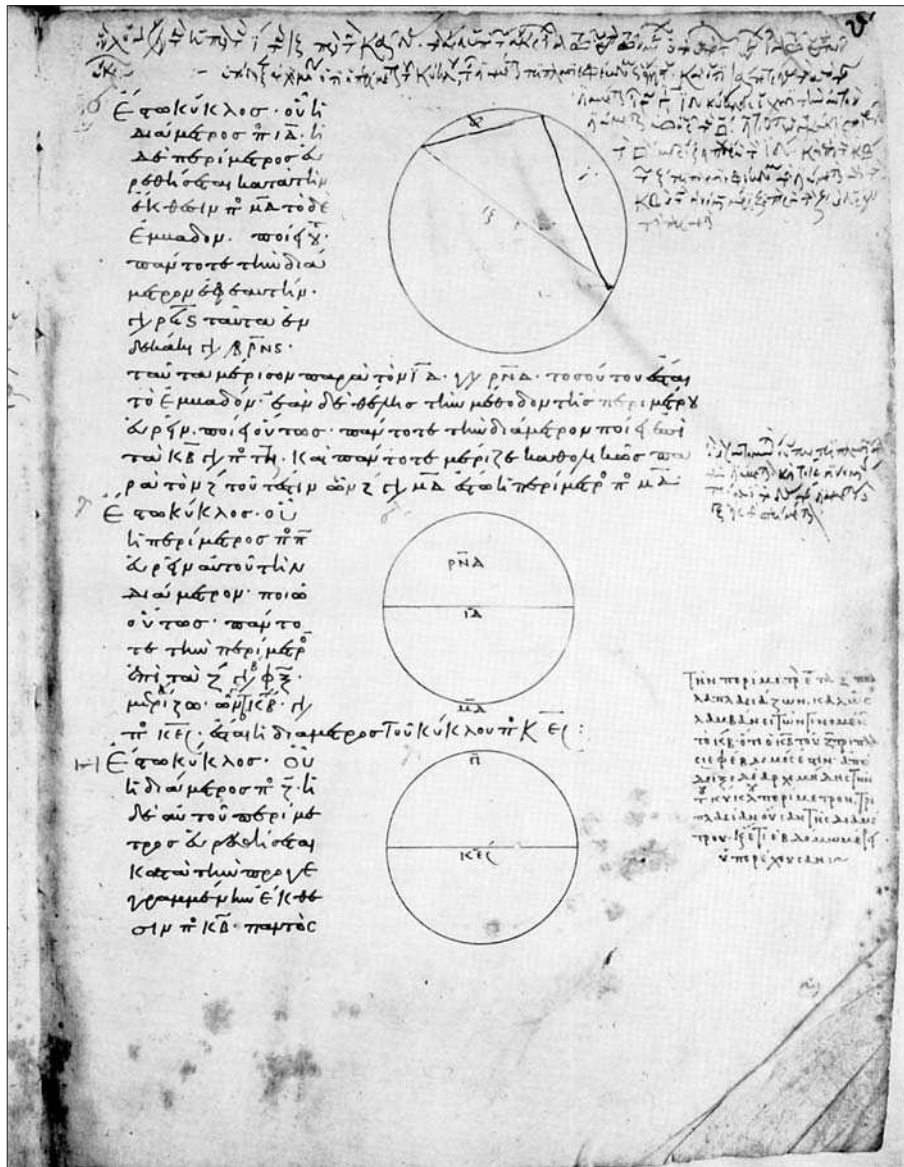


Abb. 5 Kreisberechnung, Heron von Alexandria.

Mit dieser »Systematik« werden nun die unterschiedlichen Gewölbearten – vom einfachen Tonnengewölbe bis hin zu komplizierten Formen zusammengesetzter Gewölbeteile – durchgerechnet. Alle genannten Beispiele orientieren sich am praktischen Geschehen, da sie ausnahmslos der baulichen Realität ihrer Zeit entsprechen, wie z.B. zwei sich überlagernde und auf Stützwänden ruhende Tonnengewölbe mit Segment- und Rundbögen, deren überlieferte Schnittzeichnung in der Handschrift durchaus an den Narthex der Hagia Sophia erinnert⁵³ (Abb. 6-7).

⁵³ Heron, Stereometrika 108f. – Codex Constantinopolitanus fol. 48 v. – Der Unterschied zum Narthex der Hagia Sophia besteht

darin, dass bei Heron der Segmentbogen über dem Tonnengewölbe angeordnet ist.

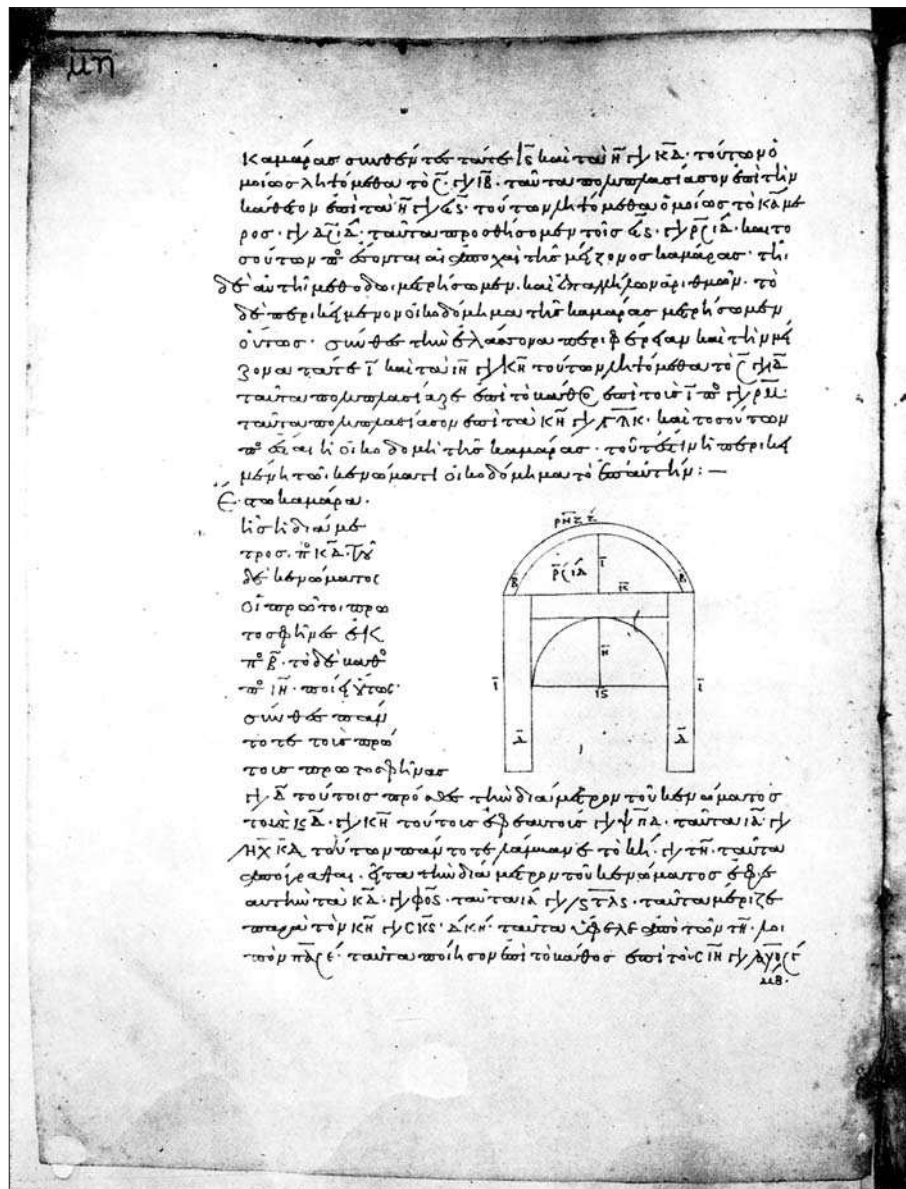


Abb. 6 Vermessung übereinanderliegender Gewölbe, Heron von Alexandria.

Eine dieser Aufgaben, bei der die Berechnung von Pendentifs im Vordergrund steht, führt nun direkt in den Bau der Hagia Sophia und zwar zu ihrem konstruktiv und bautechnisch schwierigsten Bereich, der zentralen Kuppel. Diese war schon bald nach ihrer Fertigstellung einem schweren Erdbeben zum Opfer gefallen und bereits im Jahr 558 eingestürzt. Zeitgenössischen Berichten zufolge wurde sie aus Gründen besserer Tragfähigkeit beim Wiederaufbau um ca. 6,25m erhöht⁵⁴. Doch scheint sie auch vor der Erneuerung und Ver-

⁵⁴ »In that year the dome of the Great Church was being restored, for it had cracked in several places because of the shocks that had occurred through God's benevolence. As the Isaurians were working, suddenly the eastern part of the supporting dome fell

and crushed the *kibourion*, together with the holy altar. The remaining part that had stayed in place was also brought down, as was the vault itself. The dome was rebuilt 20 feet higher« Malalas, Chronicle 128.

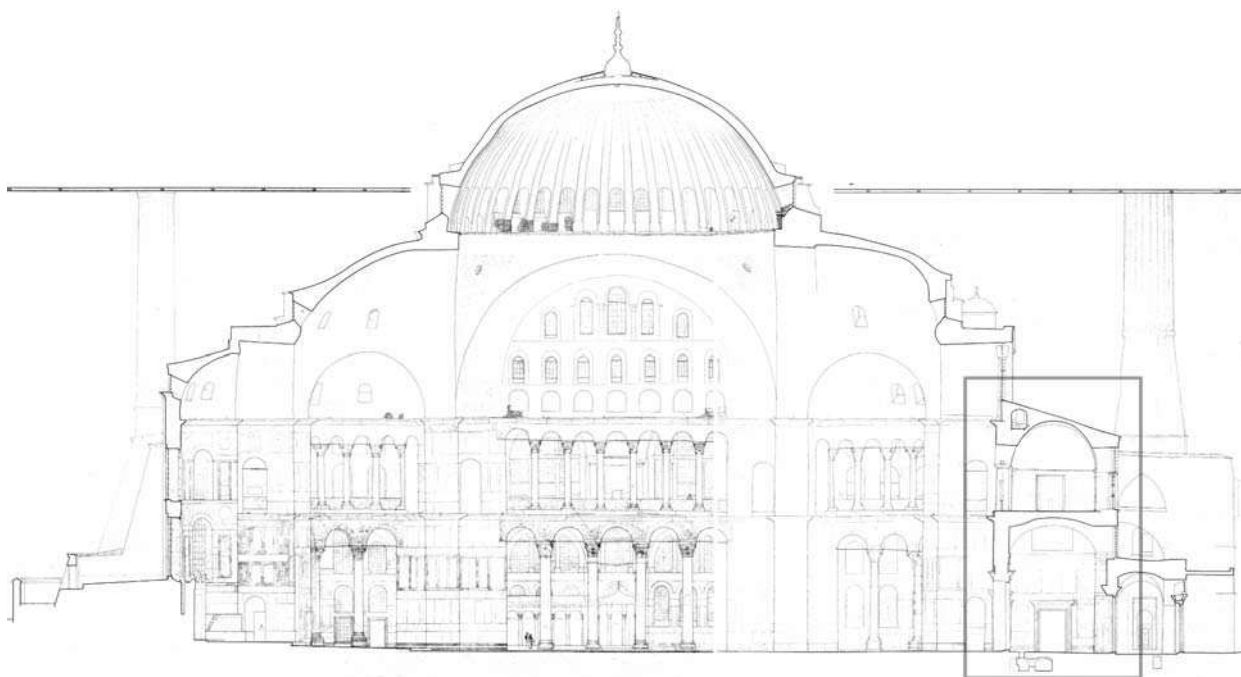


Abb. 7 Hagia Sophia, Schnitt durch den Narthex.

änderung den Bau in der charakteristischen Gestalt einer Pendentifkuppel bekrönt zu haben, da Prokops Beschreibung einen ähnlichen visuellen Eindruck wiedergibt⁵⁵, den diese zweiteilige Gewölbeform vermittelt, deren Halbkugel sich über einer größeren, aber zu sphärischen Dreiecken reduzierten Kuppel über einem Quadrat erhebt.

Hérons Aufgabe erläutert nun genau die Bemessung dieser sphärischen Dreiecke, indem er von der Halbkugel anhand des ihr eingeschriebenen halben Kubus' vier Kugelabschnitte abtrennt und damit die entstandene Restfläche sehr bequem und genau bestimmen kann⁵⁶. Der hierbei eingeschlagene Rechenweg basiert wiederum auf archimedischen Regeln und entspricht im Prinzip der noch heute gültigen Methode, wie sie in einfachen Formelsammlungen zu finden ist⁵⁷ (**Abb. 8**).

Abgesehen von ihrer mathematikhistorischen Bedeutung liegt in dieser kleinen Aufgabe aber der eigentliche Schlüssel zum Verständnis der Entwurfsgeometrie der Hagia Sophia sowie dem ihr zugrunde liegenden Vermessungssystem, auf dessen Grundlage ja erst die gesamte Planung durchgeführt werden konnte. Das Besondere dieser Aufgabe aber besteht darin, dass hier – im Gegensatz zu allen anderen Gewölberechnungen – überraschenderweise nicht die mit dem vereinfachten π -Wert (22/7) kompatiblen Durch-

⁵⁵ »Da die Verbindungsstellen der Bogen im Geviert angelegt sind, so bildet das Bauwerk dazwischen vier Dreieckswinkel. Die Basis eines jeden Dreiecks läuft infolge der gegenseitigen Annäherung der Bogen in einen spitzen Winkel aus. Ansteigend schließen des weiteren beide Schenkel ein immer breiteres Mittelfeld ein und enden schließlich bei dem hier aufsitzenden Kreisrund, an dem nun die zwei restlichen Winkel zu lie-

gen kommen. Eine riesige, dieses Kreisrund überspannende, kugelähnliche Kuppel leiht jenem besondere Schönheit« Prokop, Bauten I 1, 44-46.

⁵⁶ Heron, Stereometrica 85-87. – Codex Constantinopolitanus fol. 42r; 46r.

⁵⁷ Moderne Volumenberechnung eines Kugelabschnittes:

$$V = \frac{\pi}{3} \cdot h^2 \cdot (3r - h).$$

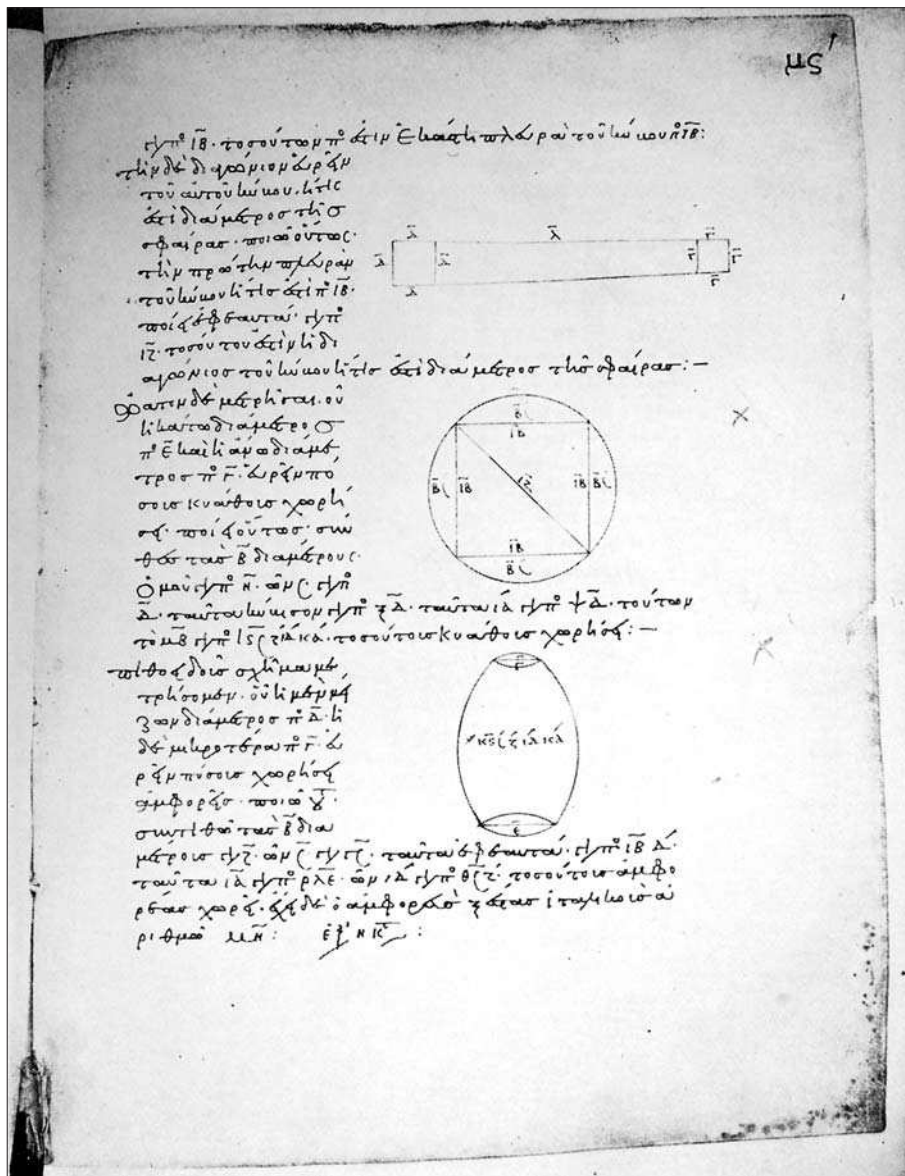


Abb. 8 Berechnung von Pendentifs, Heron von Alexandria.

messerzahlen (7 bzw. 14 usw.) eingesetzt wurden, sondern Maße, die der sogenannten Seiten- und Diagonalzahlreihe angehören.

Die Zahl als »Gnomon und Euthynterion«⁵⁸ – die Seiten- und Diagonalzahlreihe

»Allgemein ist ein Gnomon alles, durch dessen Hinzunahme ein Beliebiges, es sei Zahl oder Figur, das ganze demjenigen ähnlich macht, das hinzugenommen hat«⁵⁹.

⁵⁸ Diels / Kranz, Fragmente I 109 § 11 (Hippasos von Metapont). – »Die rationale Zahl als Gnomon und Euthynterion im Bauplan der Hagia Sophia«, unpublizierter Vortrag, R. H. W. Stichel, 27. 5. 2005 am Max-Planck-Institut für Wissenschaftsgeschichte

(Berlin) anlässlich eines internationalen Kolloquiums zum geometrischen Entwurf der Hagia Sophia.
⁵⁹ Heron, Definitiones 58.

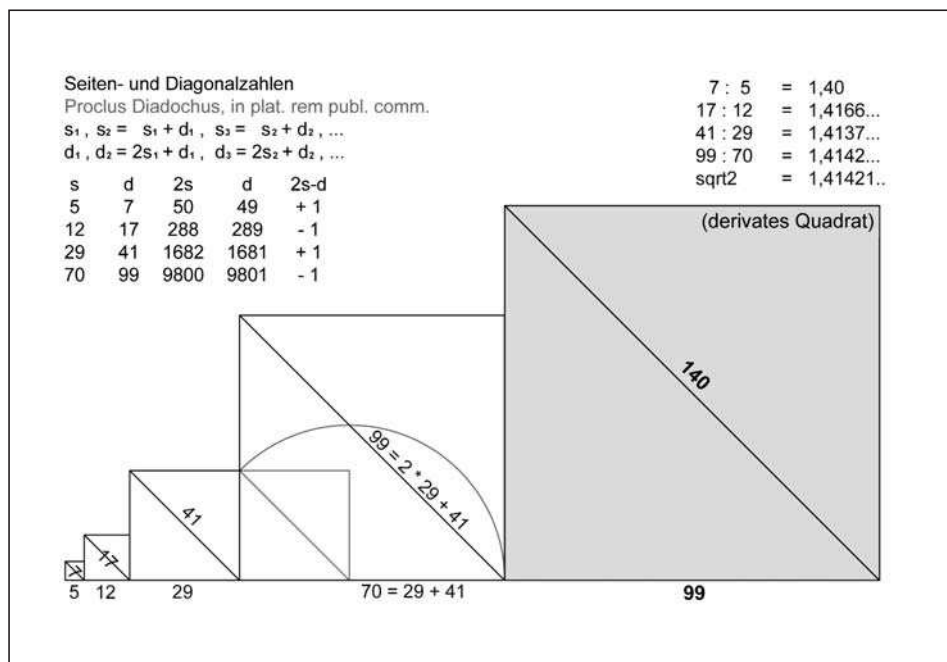


Abb. 9 Seiten- und Diagonalzahlen.

Mit der sogenannten Seiten- und Diagonalzahlreihe⁶⁰ lässt sich eine systematische Folge sehr genauer Näherungswerte für das irrationale Verhältnis $\sqrt{2}:1$ errechnen, die wiederum in der angewandten Mathematik der Antike eine notwendige Grundlage für die Bemessung aller quadratischen oder von Quadraten abgeleiteten Körper und Flächen war (Abb. 9). Spätantike Quellen schreiben ihre Entstehung den Pythagoräern zu, wobei eine erste schriftliche Spur in Platons Res Publica⁶¹ zu finden ist. Als Regel formuliert findet sie sich erstmals in Theons von Smyrna (ca. 130) Erklärung der Werke Platons. Zu einer präzisen mathematischen Formel hat diese Regel schließlich Proklos Diadochos (410-485) in seinem Kommentar zur Res Publica Platons zusammengefasst:

»Wenn die Seite eines Quadrates aussprechbar ist, dann ist der Durchmesser nicht ohne weiteres aussprechbar, sondern wird es erst dadurch, dass sein Quadrat um die Einheit [monas] größer oder kleiner gemacht wird als das doppelte Quadrat der Seite«⁶².

Unter Berufung auf Euklid präzisiert er weiter:

»The Pythagoreans proposed this elegant theorem about the diameters and sides, that when the diameter receives the side of which it is diameter it becomes a side, while the side, added to itself and receiving its diameter, becomes a diameter. And this is proved graphically in the second book of the Elements by him [Euclid]«⁶³.

⁶⁰ Die Seiten- und Diagonalzahlreihe, ihre Herkunft und Bedeutung ist ein außergewöhnlich umfangreich diskutiertes Phänomen der Mathematikgeschichte; ausgewählte Literatur: Hultsch, Exkurse II, 393-400. – Heller, Theodoros. – Heller, Teilung 333-341. – Waugh / Maxfield, Numbers. – Waschkies, Hypothese. –

Filep, Numbers. – Allgemein zur Bedeutung des Quadrats: Hørup, Dynamis.

⁶¹ Platon, Res Publica VIII. 546 c.

⁶² Zitiert nach: Heller, Teilung 333.

⁶³ Zitiert nach: Thomas, Thales 137-139.

Ausgehend von einem Quadrat mit der Seite 1 (monas) entwickelt sich – in moderner Formelsprache ausgedrückt – nach dieser Regel:

$d_1, d_2 = 2s_1 + d_1, d_3 = 2s_2 + d_2, \dots$ und $s_1, s_2 = s_1 + d_1, s_3 = s_2 + d_2, \dots$

eine spezielle Folge von Quadraten, deren Seiten- und Diagonalzahlverhältnis einen immer präziseren Näherungswert für $\sqrt{2}$ liefert, da die Differenz zwischen dem Quadrat der Diagonalen und dem doppelten Quadrat der Seiten alternierend immer nur +1 oder –1, also in keinem Fall mehr als eine Einheit (monas) beträgt und zu folgender Zahlenreihe führt:

d/s = Diagonale : Seite

1/1	$1^2 = 1;$	$2 \cdot 1^2 = 2;$	$1 - 2 = -1$
3/2	$3^2 = 9;$	$2 \cdot 2^2 = 8;$	$9 - 8 = +1$
7/5	$7^2 = 49;$	$2 \cdot 5^2 = 50;$	$49 - 50 = -1$
17/12	$17^2 = 289;$	$2 \cdot 12^2 = 288;$	$289 - 288 = +1$
41/29	$41^2 = 1681;$	$2 \cdot 29^2 = 1682;$	$1681 - 1682 = -1$
99/70	$99^2 = 9801;$	$2 \cdot 70^2 = 9800;$	$9801 - 9800 = +1$

usw.

Die Einheit (monas) aber bestimmt nicht allein das »elegante« und damit auch pragmatisch einfache Ergebnis dieser Regel, sondern hat für das antike Denken zugleich eine kosmologische Bedeutung, da sie, die Monas, einem Samenkorn gleich »alle Eigenschaften des künftigen Lebewesens bereits im Keime in sich« trägt und deshalb in der Lage ist, jenes Verhältnis von Durchmesser und Seite in einem Quadrat aus sich selbst heraus zu erzeugen⁶⁴. Theon von Smyrna begründet dies mit unmissverständlicher Deutlichkeit:

»Therefore since the unit, according to the supreme generative principle, is the starting-point of all the figures, so also in the unit will be found the ratio of the diameter to the side [...]«⁶⁵.

Es überrascht also nicht, dass die Praxisfreundlichkeit solchen Rechnens in Verbindung mit einem deutlich spürbaren kosmologischen Anspruch die Seiten- und Diagonalzahlen zu einem wichtigen Baustein in der angewandten griechischen Mathematik (logistike) machte. Denn ganz in diesem Sinne formulierte Hippasos aus Metapont im späten 5. Jahrhundert v. Chr., die Zahl sei das »proton paradeigma« der Weltschöpfung und »kritikon organon« des weltschöpfenden Gottes⁶⁶.

Folgerichtig lassen sich in den Texten Herons deshalb auch zahlreiche Beispiele finden, die den Einsatz dieser Zahlen als Näherungswerte für $\sqrt{2}$ belegen⁶⁷. Je nach Bedarf und Genauigkeitsanspruch wurden diese variiert, ohne aber von der Seiten- und Diagonalzahlenreihe und ihren Derivaten abzuweichen. So gibt es in dem bereits erwähnten Istanbuler Kodex eine Flächenberechnung des Didymus von Alexandria, bei der die Seite eines quadratischen Holzblocks mit der Kantenlänge von 10 Fuß ein Diagonalmaß von »annähernd 14 $\frac{1}{7}$ (= 99/7)« besitzt, was genau dem Zehnfachen des Wertes 99/70 dieser Reihe entspricht⁶⁸ (Abb. 10).

Bei der Mehrzahl von Herons Aufgaben kommt allerdings das Zahlenpaar 17/12 zum Einsatz, das – vergleichbar mit den Durchmesserzahlen 7 bzw. 14 für die beschriebenen Kreisberechnungen – die Rolle eines »Standardwertes« einnimmt und in zahlreichen Aufgaben zu finden ist, die sich mit der Berechnung quadratischer oder vom Quadrat abhängiger Figuren, wie z.B. dem regelmäßigen Achteck, beschäftigen⁶⁹. Mit dieser besonderen Praxis verbindet ihn aber eine lange Tradition, die ihn in »die zweifellos starke

⁶⁴ Heller, Teilung 336.

⁶⁵ Zitiert nach: Thomas, Thales 133.

⁶⁶ Siehe oben Anm. 58.

⁶⁷ Smiley, Roots.

⁶⁸ Heiberg, Mathematici 12-14. – Codex Constantinopolitanus fol. 65 r. – Eine ähnliche Rechnung ist im Papyrus Carlsberg (2. Jahrhundert) zu finden: Friberg, Links 167f.

⁶⁹ Heron, Metrika I, 21.

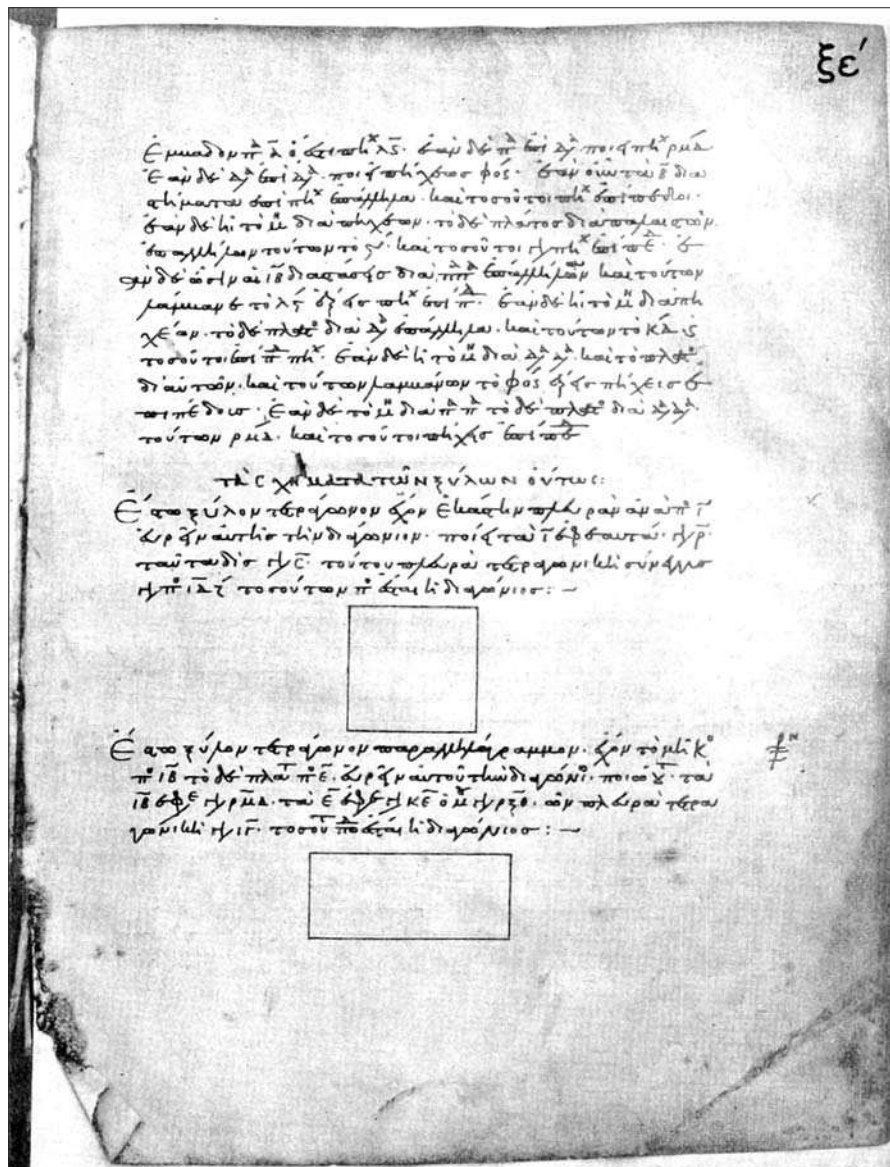


Abb. 10 Vermessung von Bauholz, Didymos von Alexandria.

Abhängigkeit [...] von orientalischen Quellen«⁷⁰ stellt, denn bereits in den mathematischen Keilschrifttexten Altbabylons tauchen die Zahlen dieser Reihe auf. In der sogenannten »Koeffizientenliste« aus Susa ist neben zahlreichen Konstanten für unterschiedliche geometrische Figuren auch das Diagonal- und Seitenverhältnis im Quadrat mit dem sexagesimalen Bruch 1;25 bezeichnet, der in dezimaler Schreibweise ebenfalls das Verhältnis 17/12 abbildet⁷¹. Den nachhaltigen Gebrauch dieses Wertes im östlichen Kultur-

⁷⁰ Neugebauer, Approximation 97 Anm. 32. – Umfassende Darstellung der Beziehungen zwischen babylonischer und griechischer Mathematik: Friberg, Traces.

⁷¹ TMS III (Textes mathématiques de Suse): Bruins / Rutten, Suse 26ff. pl. 4. – Der sexagesimale Bruch 1;25 lässt sich folgendermaßen in Dezimalzahlen umwandeln: $1;25 = 60/60 + 25/60 = 85/60 = 17/12$.

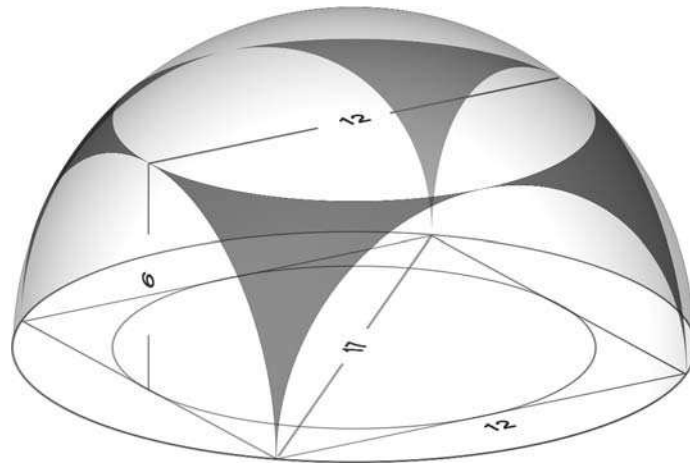


Abb. 11 Berechnung von Pendentifs, schematische Darstellung nach Heron von Alexandria.

raum belegt eine weitere, aus seleukidischer Zeit stammende Keilschrifttafel, auf der ebenfalls Rechenaufgaben mit Hilfe dieser Zahlen gelöst werden⁷².

Kreis und Quadrat – kompatible Systeme?

»Größen aber, die dasselbe Verhältnis haben, sollen proportional heißen. Eine Proportion aber ist innerhalb wenigstens drei Grenzen eingeschlossen, indem hier als Grenzen entweder die Größen oder die ihnen beigelegten Zahlen genommen werden; wie nämlich der Umkreis Grenze des Kreises ist und die Seiten die des Dreiecks, so sind die Grenzen des Verhältnisses [...] dieselben Zahlen«⁷³.

Betrachtet man Herons Aufgabe zur Bemessung der sphärischen Dreiecke vor diesem Hintergrund, so scheint es nur konsequent, dass auch hier genau dieser »Standardwert« als Berechnungsgrundlage dient, denn die geometrische Form einer Pendentikkuppel wird eben durch das Quadrat definiert, das dem projizierten Kuppelkreis eingeschrieben ist. Und genau die geometrische »Dominanz« des Quadrates gegenüber den für Gewölbe üblichen Kreis-, Kugel- und Zylinderformen mag der Grund dafür sein, warum in diesem speziellen Fall mit dem Seiten- und Diagonalzahlpaar 17/12 und nicht mit den einfachen Näherungswerten von π gerechnet wurde (Abb. 8; 11). Nun entspricht aber dieses Quadrat in Herons Übungsaufgabe geometrisch dem Quadrat unter der Kuppel im Zentrum der Hagia Sophia, das, kaum wahrnehmbar, nur durch die vier Innenkanten der großen Hauptpfeiler im Plan fixiert ist. Wie bei Heron, handelt es sich auch hier um eine Pendentikkuppel mit dem einzigen Unterschied, dass die auf den sphärischen Dreiecken lagernde Halb-

⁷² AO 6484 (Antiquités Orientales, textes cunéiformes, Musée du Louvre, Paris): Neugebauer, Keilschrift-Texte 96-107. – Neugebauer / Waschow, Quadratwurzeln. – Die wohl genaueste $\sqrt{2}$ -Approximation befindet sich auf der Keilschrift-Tafel YBC 7289 (Yale Babylonian Collection, New Haven): Neugebauer / Sachs, Cuneiform Texts 42f. – Fowler / Robson, Approximations. – Høyrup, Lengths 261ff. – Es wird vermutet, dass diese in dezimaler Schreibweise bis auf die fünfte Kommastelle genaue Zahl mit Hilfe einzelner Werte der Seiten- und Diagonalzahlreihe

erzeugt wurde. Auch die grafischen Tafeln BM 15285 (British Museum, London) dokumentieren die tiefer gehenden Kenntnisse der Babylonier über die besonderen Eigenschaften des Quadrats, vor allem des »Pythagoräischen Lehrsatzes«: Saggs, Geometrical Text. – Neugebauer, Keilschrift-Texte 137-142. – Robson, Mathematics 208-218. – Friberg, Traces 125-134. – Damerow, Pythagoras 239ff. – Zur kulturübergreifenden Verwendung dieser Zahlen: Berggren, Approximations.

⁷³ Heron, Definitiones 124.

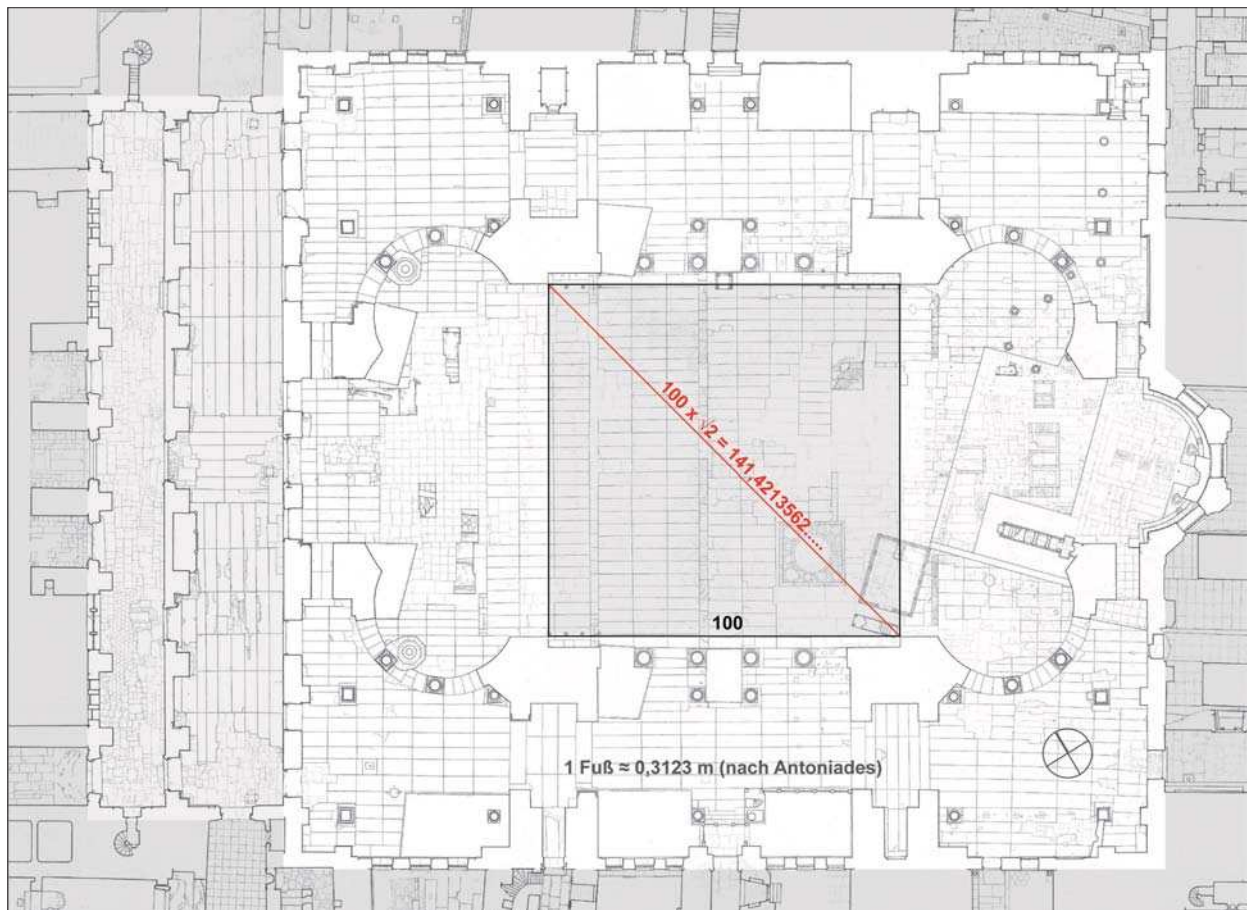


Abb. 12 Hagia Sophia, Grundriss mit Grundquadrat. Seite: 100 byz. Fuß.

kugelschale in Herons Berechnung nicht berücksichtigt ist. Doch gerade die große Genauigkeit, mit der die fast genau 31 m langen Seiten dieses zentralen Quadrates festgelegt worden sind, lässt deutlich erkennen, dass es sich durchaus um eine für den Plan des Baus verantwortliche geometrische Grundfigur handelt.

In Analogie zu der bisher erläuterten antiken Vermessungspraxis und insbesondere zu den konkreten Beispielen in den Schriften Herons müssten nun auch die Maßverhältnisse dieses Quadrates Werte aus der Seiten- und Diagonalzahlreihe bzw. ihren Derivaten widerspiegeln. Doch die gemessenen Strecken am realen Bau haben die Forschung veranlasst, den 31 m langen Abstand zwischen den Pfeilern (d.i. die Quadratseite) als elegantes Maß von 100 byz. Fuß zu interpretieren, obwohl es keinen eindeutigen Hinweis auf die genaue Größe des byzantinischen Fußes gibt⁷⁴. Eine Seitenlänge von angenommenen 100 Fuß hat jedoch zur Folge, dass sich für die Diagonale des Quadrates – in diesem Falle identisch mit dem Durchmesser der auf die sphärischen Dreiecke reduzierten Kuppel – aufgrund des Faktors $\sqrt{2}$ eine »nicht aussprechbare« also irrationale Länge von 141,421... byz. Fuß errechnen würde. Dass ein solches Maß für die angewandte griechische Mathematik und damit auch als Basis für eine Bauplanung wenig brauchbar wäre, sollte anhand der bisherigen Ausführungen deutlich geworden sein (**Abb. 12**).

⁷⁴ Zuletzt: Hoffmann / Theocharis, Entwurf.

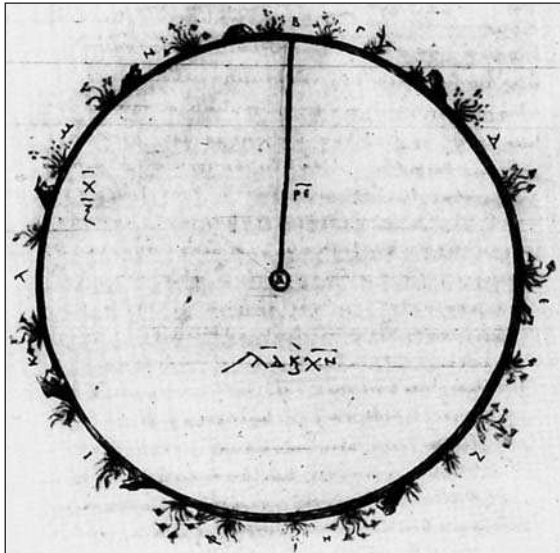


Abb. 13 Kreismessung mit Dioptra, Heron von Byzanz.

Doch auch diese scheinbare Diskrepanz zwischen allgemeiner Deutung und mathematischer Notwendigkeit lässt sich mit einem weiteren Blick in die Handbücher Herons auflösen, denn nicht das metrologische System dient einem Bauentwurf als Vermessungsgrundlage, sondern das übergeordnete System kommensurabler Zahlen, mit dem die Geometrie eines zu planenden Bauwerks fassbar wird. In diesem Sinne kann auch folgende Empfehlung in der »Metrika« verstanden werden, mit der Heron genau den Zusammenhang zwischen mathematischem System und maßlicher Beschreibung herstellt und in eine Regel fasst:

»Damit wir nun nicht bei jeder Messung Füße oder Ellen oder deren Teile zu nennen brauchen, werden wir in der Darstellung die Zählungen an [indifferenten] Monaden durchführen; denn man kann dieselben jeder beliebigen Maßeinheit unterlegen«⁷⁵.

»Nichts hindert nun im Verlauf der Rechnung die Maßeinheit selbst in der Weise zu ändern, daß sämtliche

Bruchteile der ursprünglichen Einheit sich in »ganze« Anzahlen (der neuen Maßeinheiten) verwandeln«⁷⁶. Nimmt man diese Empfehlung, vor allem auch hinsichtlich der Ungewissheit über die Größe des byzantinischen Fußes ernst, so müssten die Ingenieure vor der eigentlichen Festlegung der endgültigen Baumaße die Einbettung der Entwurfs- bzw. Baugeometrie in ein System kommensurabler Zahlenwerte vorgenommen haben.

Um ein solches aber identifizieren zu können, ist es nötig, den Blick noch einmal auf Herons Aufgaben zu lenken. Trotz der offenkundigen Praxisnähe werden in seinen »Lehrbüchern«, z.B. bei Gewölbeberechnungen, ausschließlich kleinformatige Zahlen bis max. 14 Fuß oder Ellen (im seltenen Einzelfall auch 28 Fuß) verwendet, mit denen zwar einfache und leicht nachvollziehbare Rechenoperationen durchgeführt werden können, die aber kaum den Maßen eines realen Bauwerks entsprechen. Das Ziel der Aufgaben war also vorrangig die Einübung möglichst anschaulicher Berechnungsmethoden und hat weniger den Zweck verfolgt, Musterrechnungen für konkrete Bauvorhaben vorzuführen. Das mag auch der Grund dafür sein, dass diese Aufgaben im Wesentlichen nur geometrische Einzelprobleme behandeln, die erst bei der Konzeption eines Bauwerks zu komplexen Verschränkungen führen. Umso schwieriger ist es, das mathematische System zu identifizieren, das einen architektonischen Entwurf mit seiner kreativen Kombination geometrischer Einzelformen auch bei realen Dimensionen zusammenhält.

Mit einer weiteren Quelle aus dem Bereich des Vermessungswesens ist es jedoch möglich, eine Brücke zwischen genau den kleinformatigen Beispielen Herons und der mathematischen Konzeption eines Großbaus wie der Hagia Sophia zu schlagen. Es handelt sich hierbei um die »Geodaesia«, eine byzantinische Handschrift aus dem 10. Jahrhundert, deren Autor zwar nicht bekannt ist, doch aufgrund seiner inhaltlichen Nähe zu den geodätischen Texten des Alexandriners, unter dem Namen Heron von Byzanz firmiert⁷⁷. In dem kleinen Handbuch werden u.a. auch Kreismessungen – manuell mit Seil und optisch mit der »Dioptra« – in genau den Größenordnungen durchgeführt, wie sie auch bei monumentalen Bauten der

⁷⁵ Zitiert nach der Übersetzung: Klein, Logistik 105.

⁷⁶ Klein, Logistik 105.

⁷⁷ Heron, Geodaesia fol. 48v; fol. 49v.

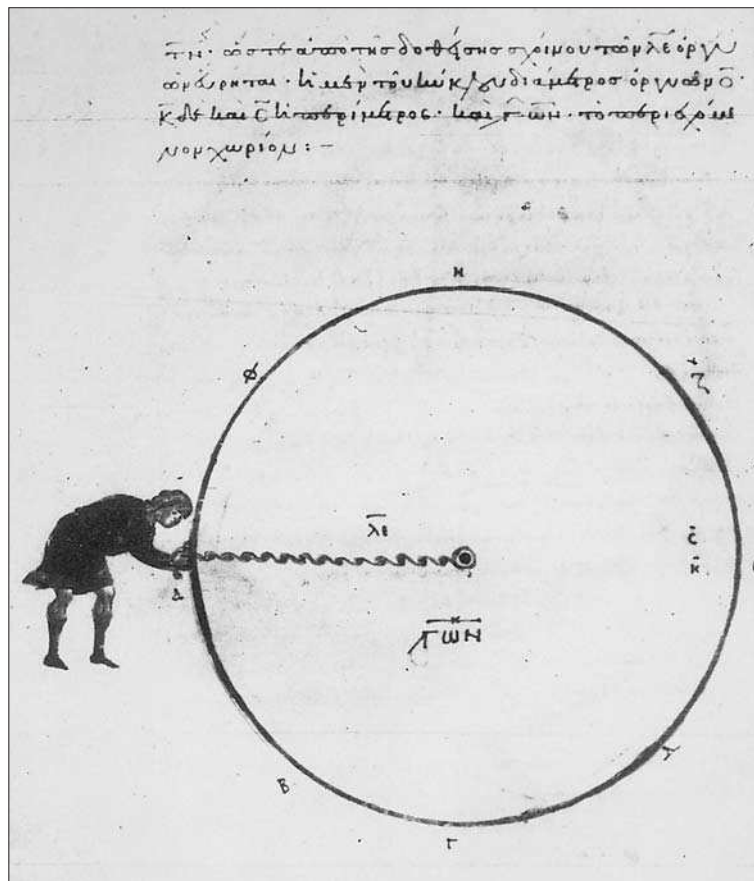


Abb. 14 Kreismessung mit Seil, Heron von Byzanz.

Spätantike zu beobachten sind (**Abb. 13-14**). So wird mit Durchmesserzahlen zwischen 70 und 210 Ellen operiert, die als Vielfache der bei Heron verwendeten Maße ebenso mit dem einfachen Näherungswert von $\pi \approx 3 \frac{1}{7}$ ($22/7$) kompatibel sind:

z.B. $U = D \cdot \pi$; $70 \cdot 22/7 = 220$; $105 \cdot 22/7 = 330$; $140 \cdot 22/7 = 440$; ... usw.

Außerdem kommt bei diesen realen Dimensionen eine hilfreiche Eigenschaft der Zahlen zum Tragen, die zu einer punktuellen Koinzidenz zwischen den Durchmessern aus der »Geodaesia« und bestimmten Derivaten der Seiten- und Diagonalzahlreihe führt.

Nun ist aber auch die geometrische Form einer Pendentfokuppel von eben dieser Koinzidenz bestimmt⁷⁸, da hier der Durchmesser der reduzierten Kuppelschale identisch mit der Diagonalen des vom Kuppelkreis umschriebenen Quadrates ist. Verfährt man nun gemäß Herons »Metrika« und nimmt die initiale Bemessung des Entwurfs mit Monaden, also den unteilbaren Grundbausteinen alles Seienden vor⁷⁹, so bedeutet dies in der Praxis nur, dass ein System rationaler Zahlen und Näherungswerte gefunden werden muss, mit dem sowohl Quadrat- als auch Kreisberechnungen gleichermaßen ganzzahlig durchgeführt werden können. Unter dieser Voraussetzung kann es daher nur einen Wert geben, mit dem die Diagonale des

⁷⁸ Schematische Darstellung der Pendentfokuppel: Mainstone, Sophia 163.

⁷⁹ Radke, Zahl.

Quadrates bzw. der Durchmesser seines Umkreises beziffert werden kann; nämlich die Zahl 140, die einerseits durch 7 teilbar, also mit dem π -Wert 22/7 kompatibel ist, und andererseits als Derivat der Seiten- und Diagonalzahlreihe 140/99 eine in dezimaler Schreibweise bis auf die vierte Kommastelle genauen Näherungswert für $\sqrt{2}$ erzeugt (1,4141... statt 1,4142...). Aus der Quadratseite von 99 würde sich als reales Baumaß ein »Fuß« von 0,3131m Länge errechnen lassen, der lediglich um ca. 0,5% größer wäre als der von E. M. Antoniadis aus den Maßen der Hagia Sophia interpolierte sogenannte byzantinische Fuß (0,3123m)⁸⁰. Interessanter als die Diskussion um diesen Fuß, dessen Größe sich ohnehin nicht millimetergenau ermitteln lässt, ist jedoch die Frage, auf welche Weise es mit dem System rationaler Näherungswerte möglich ist, über die Grundfigur des zentralen Quadrates hinaus, die komplizierte Geometrie der Hagia Sophia in ihrer Gesamtheit aufzuschlüsseln.

VON DER THEORIE ZUM PLAN – DIE HAGIA SOPHIA ALS »HYBRIDES« SYSTEM

»Die Formgebung der Tempel beruht auf Symmetrie, an deren Gesetze sich die Architekten peinlichst genau halten müssen. Diese aber wird von der Proportion erzeugt, die die Griechen Analogia nennen. Proportion liegt vor, wenn den Gliedern am ganzen Bau und dem Gesamtbau ein berechneter Teil [modulus] als gemeinsames Grundmaß zu Grunde gelegt ist. Aus ihr ergibt sich das System der Symmetrien«⁸¹.

Weitgehend einig ist sich die Forschung darüber, dass der Plan der Hagia Sophia im Wesentlichen aus den Maßverhältnissen des Grundquadrates unter der Kuppel abgeleitet ist. Durch Analysen, die sich in erster Linie auf rein geometrische Konstruktionsverfahren stützten, konnten zwar punktuell Zusammenhänge erkannt werden, doch verhinderte die angenommene Länge der Quadratseite von 100 Fuß eine genaue Bezifferung vor allem derjenigen Strecken, die mit der irrationalen Diagonale korrelieren. So entstand der Eindruck, als ob die Geometrie des Baues sich in ihrer Gesamtheit einer maßlichen Objektivierung entzöge, weswegen auch in einer neueren Arbeit die Meinung vertreten wurde, dass hierin eine auf die numerische Bemessung bewusst verzichtende Konzeption der Architekten zu sehen sei. Doch ganz im Gegensatz zu dieser Auffassung ist es gerade das geschilderte, konsequent angewandte Zahlensystem ausgehend von dem Seiten- und Diagonalverhältnis 99/140 für das Grundquadrat, das die geometrischen Zusammenhänge in ihrer Komplexität erst sichtbar zu machen vermag (Abb. 15).

Um die Vorgehensweise der beiden Ingenieure rekonstruieren zu können, ist es aber notwendig, eine weitere geometrische Figur einzuführen, die zwar auf den ersten Blick nicht mit dem Grundrissystem der Hagia Sophia zu korrespondieren scheint, an der aber sehr anschaulich gezeigt werden kann, wie eine geometrische Figuration mit der antiken Vermessungspraxis in Übereinstimmung zu bringen ist. Es handelt sich hierbei um das regelmäßige Achteck in seiner Erweiterung als Oktagramm, eine für das antike und nachantike Vermessungswesen zentrale Figur⁸² (Abb. 16), die durch Verdrehen zweier Quadrate um 45° entsteht, und deren geometrische Binnenstruktur genau jene Strecken erzeugt, die der Seiten- und Diagonalzahlreihe oder ihren Derivaten angehören, vorausgesetzt, das generierende Quadrat ist selbst mit einem solchen Systemwert ausgestattet⁸³. Auch Heron von Alexandria bediente sich bei der Flächenberechnung

⁸⁰ Antoniades, Ekphrasis 1; 77. – Schilbach, Metrologie 13. – Zusammenfassend: Hoffmann / Theocharis, Entwurf 400f.

⁸¹ Vitruv, Architektur III, 1, 1.

⁸² Beispiele in Auswahl: Høyrup, Lengths 264. – Cantor, Vorlesungen 401. – Codex Arcerianus B 538, 11-540, 2 12r. –

Rivius, Architectur XXXVIII. – Estienne / Liébault, Feldbau 473; 476.

⁸³ Svenshon / Stichel, Monads. – Svenshon, Oktagramm. – Svenshon / Stichel, Oktagramm.

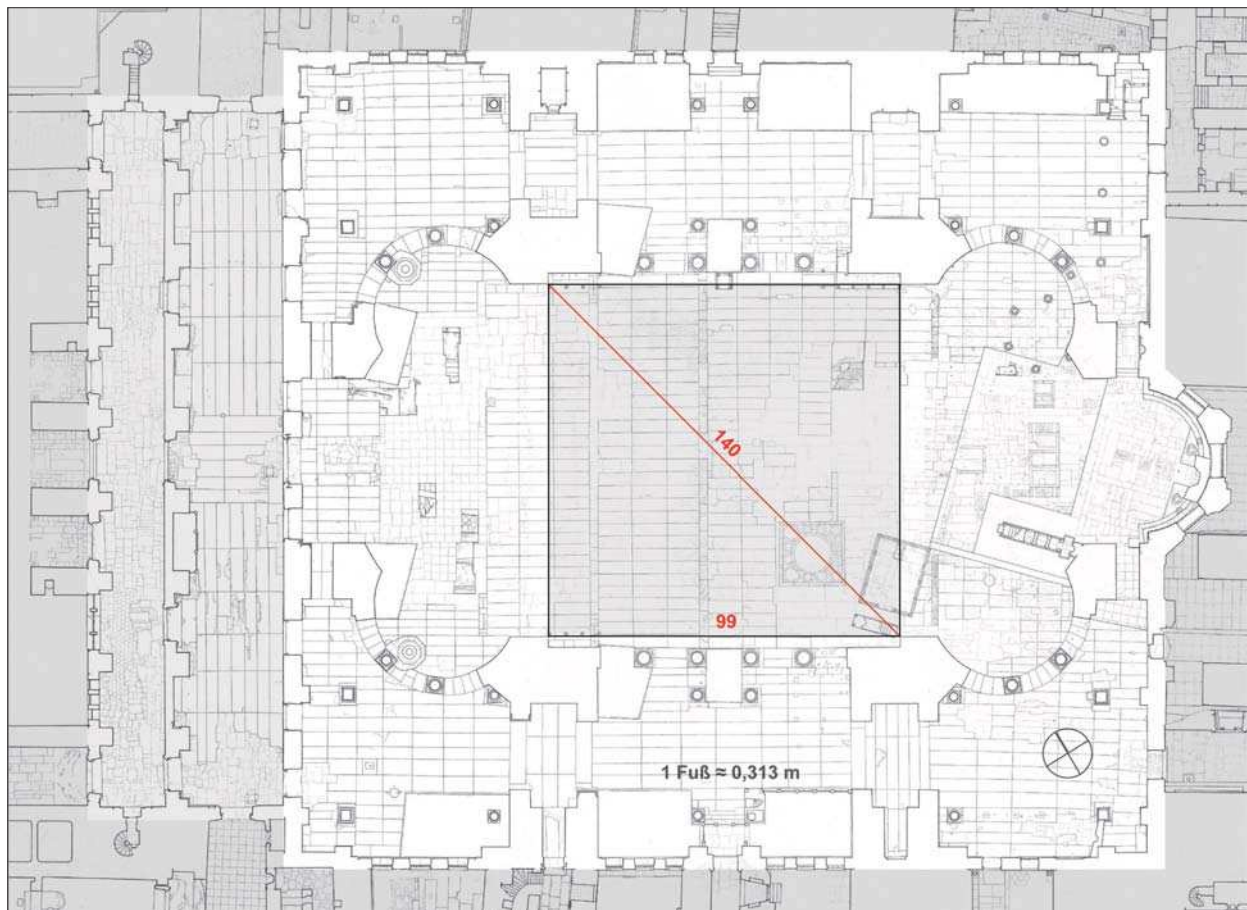


Abb. 15 Hagia Sophia, Grundriss mit Grundquadrat. Seitenverhältnis 99/140.

des Achtecks dieser besonderen Eigenschaft, indem er deren Größe mit Derivaten der Reihe bezifferte, um die einzelnen Teilabschnitte des Achtecks mit Zahlen dieses Systems ermitteln zu können⁸⁴.

Konstruiert man nun aus dem Grundquadrat mit der Seite 99 und der Diagonale 140 Fuß ein solches Oktagon, so werden die Quadratseiten in Abschnitte geteilt, die sich mit den sehr genauen Näherungswerten 29, 41, 29 aus der Seiten- und Diagonalzahlreihe beziffern lassen (**Abb. 17**). Durch das Einfügen von Diagonalen, werden diese Werte weiter geteilt und ausdifferenziert, sodass sich das Quadrat in ein Gefüge von unterschiedlichen Teilabschnitten auflöst, deren Größe nicht nur an dieses Zahlensystem gebunden ist, sondern auch an jene Reihe, die sich mit dem einfachen π -Wert von $22/7$ kompatibel zeigt. Werden nun in einem ersten Schritt die Schnittpunkte von Diagonalen und Seiten im Grundquadrat in Querrichtung miteinander verbunden, so teilen diese »Achsen« beispielsweise die Diagonale des gedrehten Quadrats, die ja zugleich auch den Durchmesser der Pendentikkuppel darstellt – in genau vier gleiche Abschnitte mit einer Länge von 35 Fuß ($4 \cdot 35 = 140$), deren gleichmäßiger Rhythmus bereits einen unmittelbaren Hinweis auf die innere Struktur des Bauwerks gibt. Wird diese Figur in den tatsächlichen Grundrissplan eingeblendet, so ist sofort erkennbar, dass:

⁸⁴ Heron, Metrika I, 21.

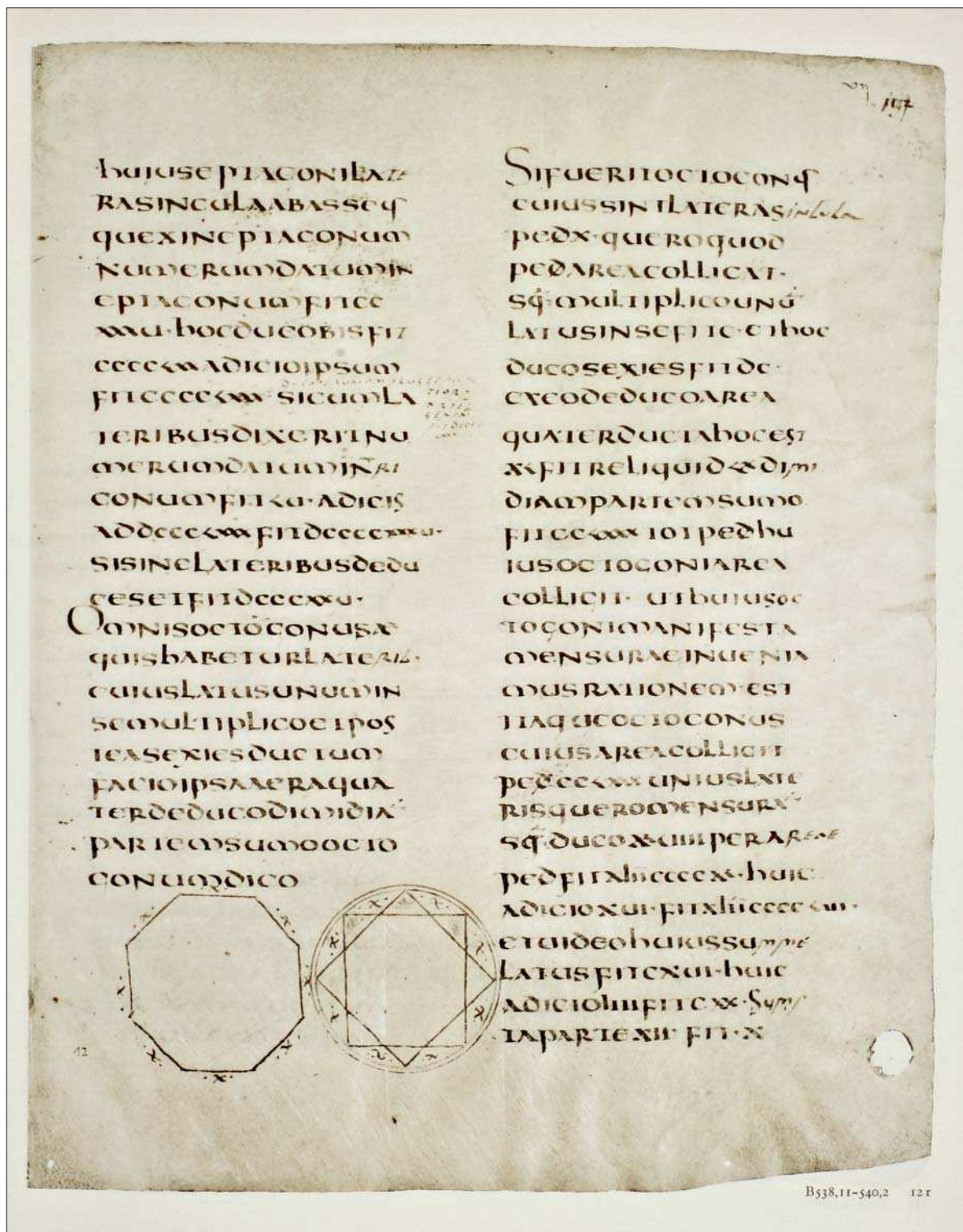


Abb. 16 Oktagramm als Messfigur der Agrimensoren.

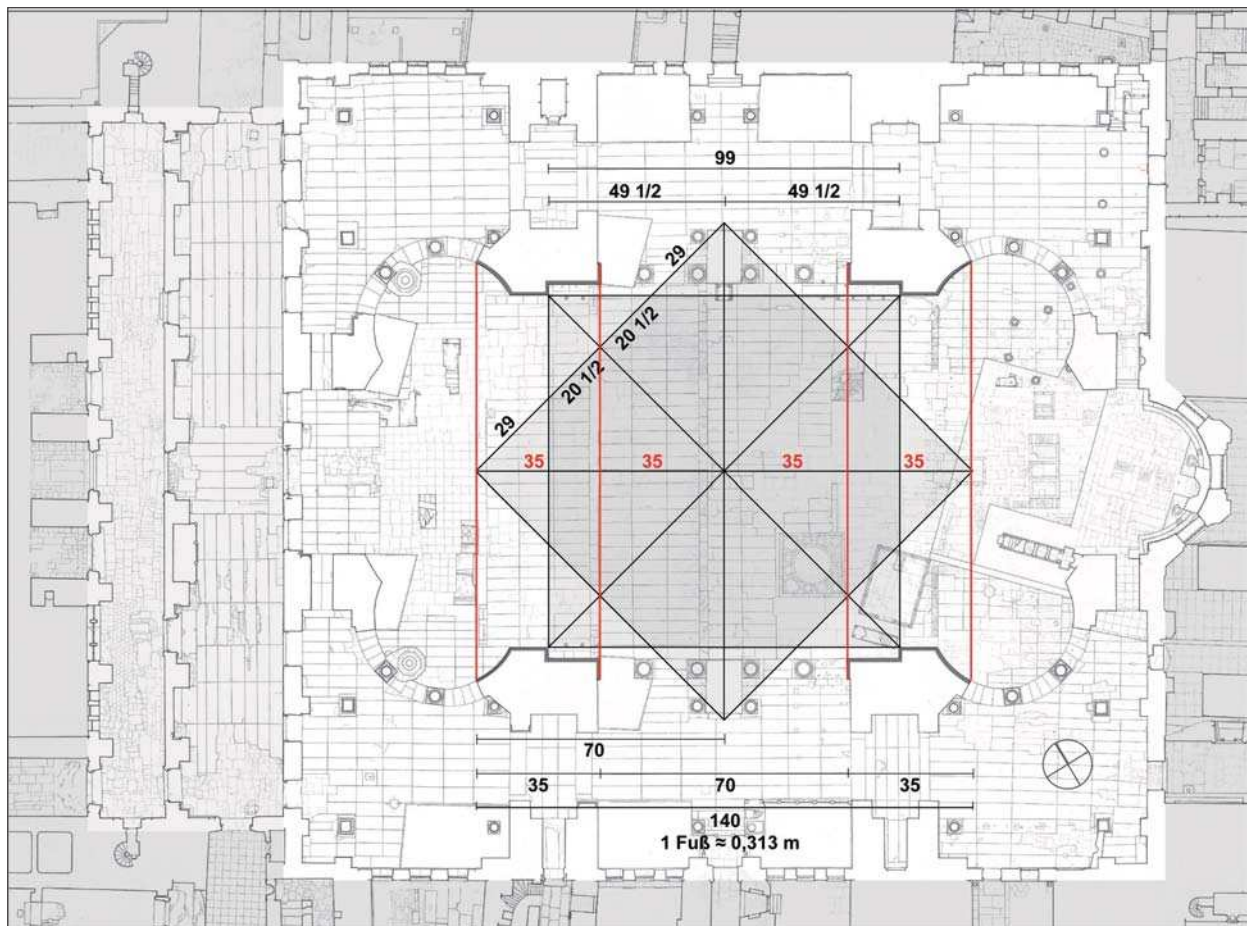


Abb. 17 Hagia Sophia, Grundriss. Teilung der Quadratdiagonalen und Bestimmung der Pfeilerbreite.

1. die gesamte Länge der horizontalen Diagonalen (140) mit der Distanz zwischen den äußeren, westlichen und östlichen Kanten der großen Pfeiler übereinstimmt;
2. die Teilabschnitte (35) wiederum genau die Breite dieser Pfeiler bestimmen und
3. die lichte Weite zwischen den Pfeilern der halben Diagonale bzw. dem doppelten Teilabschnitt (70) entspricht (**Abb. 17**).

Hier zeigt sich bereits, mit welcher Klarheit der Grundrissplan mittels der »rechnenden Geometrie«, also dem Zusammenspiel zwischen Arithmetik und konstruierender Geometrie entwickelt wurde. Hätten sich jedoch die Ingenieure für eine Quadratseitenlänge von 100 Fuß entschieden, so wäre eine Bemessung dieser Primärkonstruktion mit rationalen Zahlen nicht möglich gewesen, da die Diagonale, als Ausgangsmaß für den Stützenrhythmus mit einem Wert von $100 \cdot \sqrt{2} = 141,4213...$ »nicht ausdrückbar« gewesen wäre.

Während die Gliederung des Pfeilersystems durch einfache Streckenteilung festgelegt werden kann, die auch ohne Kenntnis genauer Maße nachvollziehbar ist, erweist sich die exzentrische Lage der Konchen als ein geometrisch weitaus schwierigeres Problem. Hier ist die Annäherung über ein Konstruktionsverfahren ausgeschlossen, wenn nicht gleichzeitig der Zusammenhang mit dem zugrunde liegenden Zahlensystem bedacht wird. Ihre Position leitet sich aus den Teilabschnitten der Quadratseiten ab, die, in Längsrichtung

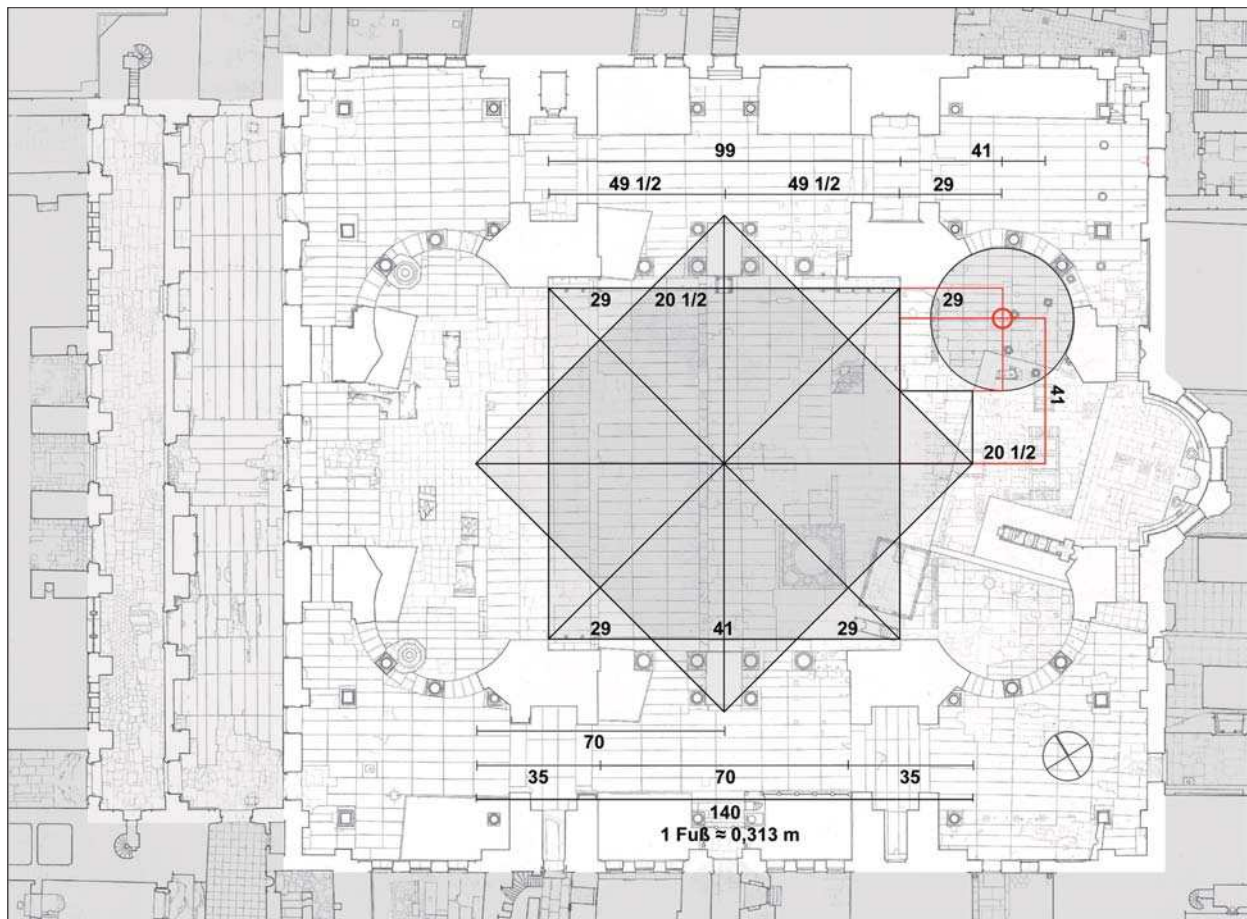


Abb. 18 Hagia Sophia, Grundriss. Konzeption der Konchenkreise.

des Hauptraumes symmetrisch zu Quadraten mit den Seitenlängen 29 und 41 ergänzt, durch ihre Überlagerung Schnittpunkte erzeugen, mit denen die Mittelpunkte der Kreise im Plan fixiert werden können (Abb. 18). Der Vorteil dieses Verfahrens liegt vor allem darin, dass diese wichtigen Punkte wie in einem Koordinatensystem festgeschrieben sind und sich prinzipiell von jeder beliebigen Stelle des Baus erreichen bzw. wiederherstellen lassen. So wäre es alternativ auch möglich, die Konchenmittelpunkte auf das hypothetische Achsenkreuz im Zentrum des Baus zu beziehen und als Rechtwinkelkoordinaten mit eindeutig bestimmten Distanzen, nämlich:

$78 \frac{1}{2} (= 99/2 + 29)$ in Längsrichtung und 41 in Querrichtung auf dem Plan zu verzeichnen. Wie nun tatsächlich gemessen wurde, um den Baugrund vorzubereiten und die Schnurgerüste einzurichten, nachdem das Gesamtsystem einmal festgelegt war, ist von nachrangiger Bedeutung, denn gerade mit dem optischen Winkelmesser, der Dioptra, war es möglich, Achsen in jeder Richtung präzise festzulegen, um an ihnen die notwendigen Distanzen abzutragen und die entsprechenden Objektpunkte zu markieren.

Besonders anschaulich lässt sich diese differenzierte Vorgehensweise an der Bemessung der zentralen Pendentifkuppel nachvollziehen, weil es gerade hier erforderlich ist, die beiden mathematischen Näherungsmethoden der Kreis- und Quadratberechnung miteinander zu verschränken, um das Kuppelsystem *in toto* berechenbar zu machen. Wie bereits erläutert, handelt es sich bei dieser speziellen Kuppelform um ein zusammengesetztes Gewölbe, bestehend aus einer zu sphärischen Dreiecken reduzierten unteren Kuppel-

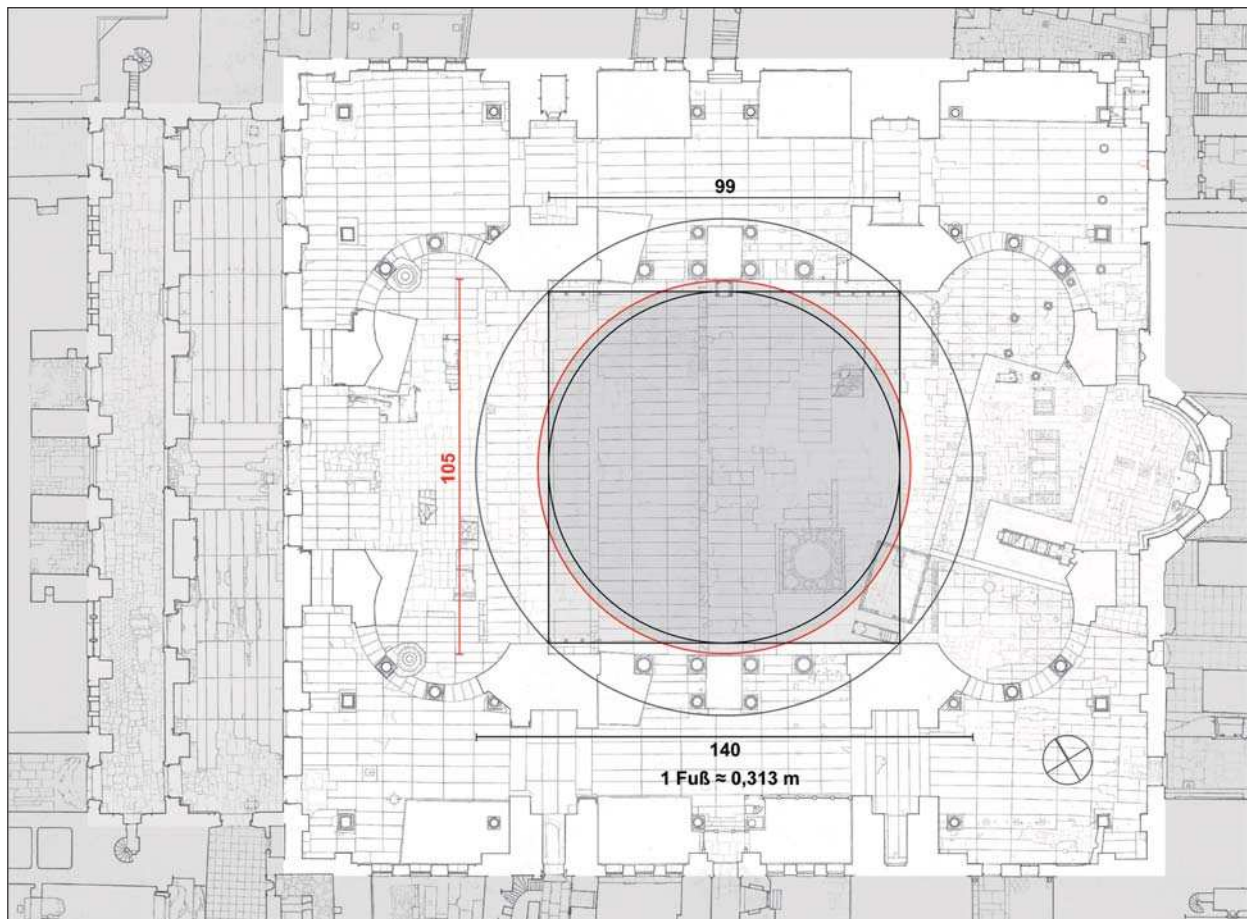


Abb. 19 Hagia Sophia, Grundriss. Projektion des Pendentfikkuppelsystems.

schale und einer darauf ruhenden Halbkugel⁸⁵. Das geometrische Prinzip dieser Konstruktion ist denkbar einfach und lässt sich in der Projektion als Quadrat mit In- und Umkreis darstellen, wobei die Zwickel zwischen Inkreis und Quadratecken die Pendentifs darstellen, dieser Kreis selbst aber die Projektion der abschließenden Halbkugel zeigt.

In der erläuternden Skizze zu Herons Berechnung der sphärischen Dreiecke fehlt jedoch der Inkreis, da die Halbkugel nicht Gegenstand der Aufgabe ist⁸⁶, sodass die Kuppel der Hagia Sophia selbst nach ihrem geometrischen und maßlichen Gesamtkonzept befragt werden muss. Ausgangsgröße ist das bekannte Grundquadrat mit der Seite von 99 F⁸⁷ und der Diagonalen von 140 F, die gleichzeitig auch den Durchmesser des unteren Kuppelbereiches repräsentiert. Entsprechend der Rechnung Herons wird neben den seitlichen Kugelabschnitten auch die Kalotte durch das zum Kubus erweiterten innen liegenden Quadrates mit der Kantenlänge 99 F abgetrennt, wodurch eine runde Öffnung mit eben diesem Wert als Durchmesser entsteht, die wiederum der Öffnung in Höhe des Kranzgesimses am Kuppelfuß der Kirche entspricht. Nun ist dieses Maß aber nicht mehr kompatibel mit dem π -Wert von 22/7, sodass dieser Durchmesser offen-

⁸⁵ Mainstone, Sophia 163.

⁸⁶ Codex Constantinopolitanus fol. 46r (Bruins I, 87).

⁸⁷ Aus Gründen der Anschaulichkeit werden die in Anlehnung an Herons »Metrika« rein als Zahlen aufgefassten Dimensionen

von nun an als »Fuß« = F bezeichnet, da mit ihnen im Folgenden die maßliche Beschreibung des konkreten Baus vorgenommen wird.

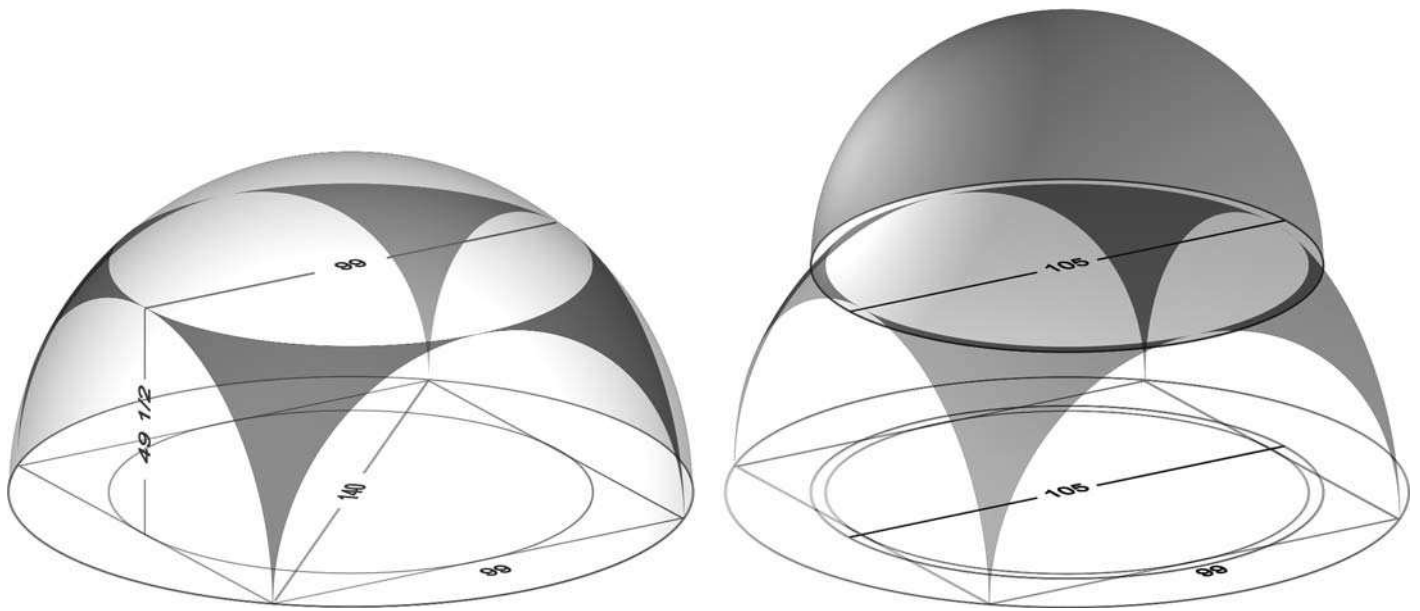


Abb. 20 Hagia Sophia, schematische Darstellung des Pendentifkuppelsystems.

sichtlich nicht für eine abschließende Kuppel in Betracht kam. Tatsächlich setzt die realisierte Kuppel um ca. 1m hinter dem großen Öffnungsring an, wodurch zugleich auch der Wartungsgang an ihrem Fuß vor der lichtdurchfluteten Fensterzone ermöglicht wurde. Obwohl die Kuppel in wesentlichen Teilen zerstört, durch Setzung und Erdbeneinfluss deformiert ist sowie aufgrund der zahlreichen Reparaturen auch in ihren Maßen Veränderungen erfahren hat⁸⁸, lässt sich ihr Durchmesser auf ca. 33m bestimmen, ein Wert, der einer Strecke von etwa 105 F entspricht (**Abb. 19-20**). Dieses Maß fügt sich nun wieder nahtlos in die Folge jener Zahlen, die mit dem π -Wert von 22/7 korrespondieren und ist konkret auch als Radius in der »Geodaesia« des Heron von Byzanz zu finden, wo die Vermessung eines Kreises mit Hilfe der Dioptra geübt wird⁸⁹.

Durch diese kleine, aber folgenreiche Veränderung an der Geometrie des Pendentifkuppelsystems der Hagia Sophia, ist es den Ingenieuren gelungen, die unterschiedlichen Gewölbemaße zu modularisieren, um die für den Bau notwendigen Berechnungen nach der bewährten Methode Herons mit »standardisierten« Tabellenwerten durchführen zu können. So lässt sich die Innenfläche der Halbkuppelschale schon in der Planungsphase mit einer in der »Stereometrica« verwendeten Formel zur Berechnung von Kugeloberflächen problemlos genau und vor allem ausschließlich mit ganzen Zahlen ermitteln. In moderne Schreibweise umgesetzt, wird nach folgendem Verfahren gerechnet:

$A = 4d^2 \cdot \pi/8$, wobei für π der Näherungswert 22/7 eingesetzt wird, was zu dem klaren Ergebnis von 17325 Quadratfuß für die Halbkugelfläche führt⁹⁰.

In ähnlich einfacher Weise können die Pendentifs berechnet werden, da hier ebenfalls mit rationalen Näherungswerten, in diesem Fall aus der Seiten- und Diagonalzahlreihe, operiert wird. In der bereits erläuterten Aufgabe geht es zwar um die Volumenermittlung der Dreiecksflächen, doch kann auch die Mantelfläche

⁸⁸ Emerson / van Nice, Report 423-436. – Sato et al., Characteristics.

⁸⁹ Heron, Geodaesia fol. 48v.

⁹⁰ Heron, Stereometrica 69. – $A = 4d^2 \cdot \pi/8$ entspricht der heute noch gebräuchlichen Formel: $A = 2\pi \cdot r^2 = 2 \cdot 22/7 \cdot 2756\frac{1}{4} = 17325$.

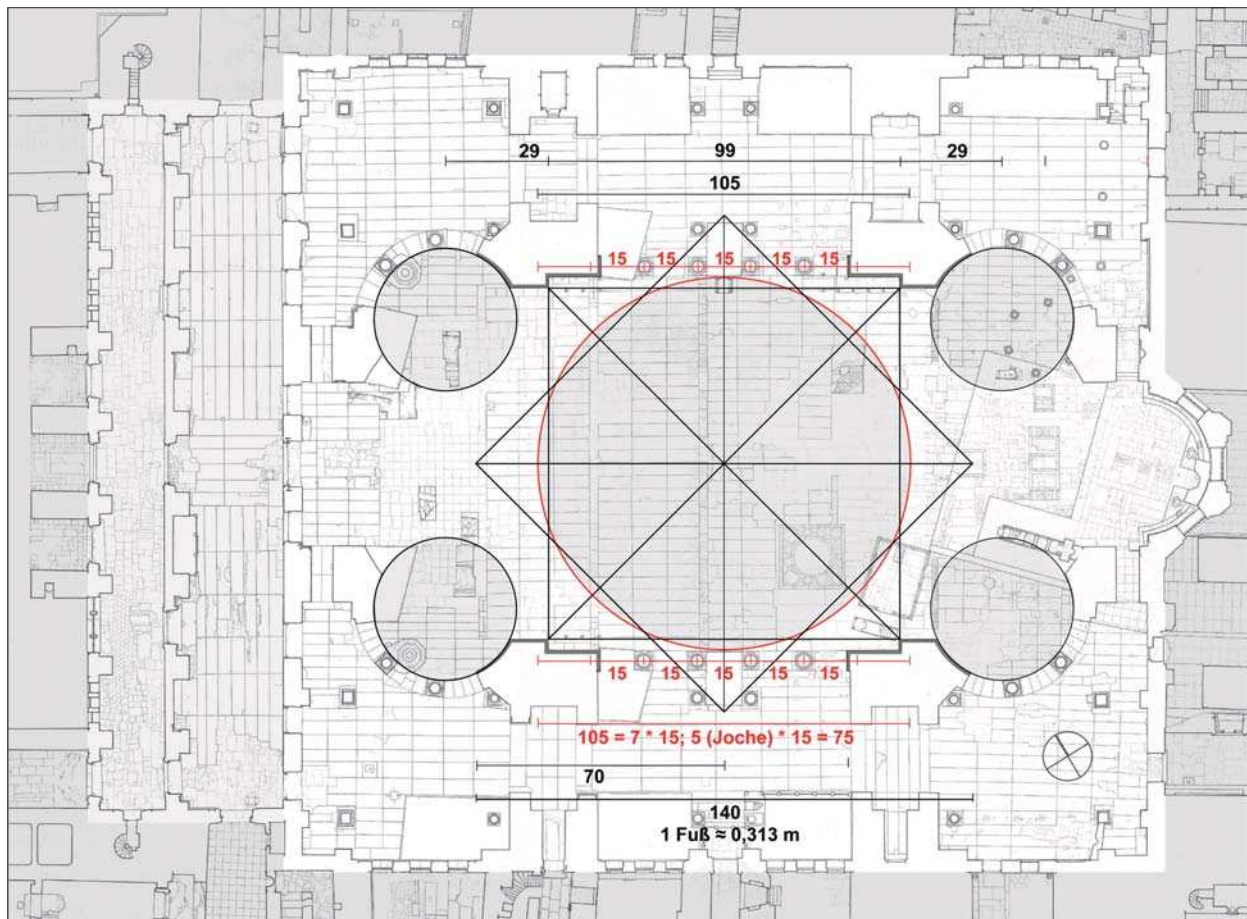


Abb. 21 Hagia Sophia, Grundriss. Festlegung der Säulenjoche.

der sphärischen Dreiecke wiederum mit Hilfe des kompatiblen Näherungswertes von π auf ein »glattes« Maß von 3740 Quadratfuß berechnet werden⁹¹: Mit der Gesamtfläche von 21 065 Quadratfuß liegen nun für den gesamten Kuppelbereich qualifizierte Maßangaben vor, mit denen es problemlos möglich ist, die unterschiedlichen Gewerke differenziert zu planen und Teilmaßnahmen, wie z.B. die genaue Menge der anzufertigenden Kuppelmosaiken, als Bestellungen weiter in Auftrag zu geben. Ebenso komfortabel ist der Kuppelumfang zu ermitteln, der, gemäß Herons verwendeter Formel: $U = d \cdot \pi$, d.i. $105 \cdot 22/7 = 330$ F beträgt⁹². Nun befinden sich am Kuppelfuß 40 regelmäßig angeordnete Fenster, deren Anzahl durch den Kuppelumfang geteilt ein Achsmaß von $8\frac{1}{4}$ F ergibt. Dieser Wert steht nicht etwa isoliert nur für die Berechnung dieses Bauteils zur Verfügung, sondern erweist sich für weite Bereiche des Gesamtplans als eine Art »Modul«, das als ganzzahliges Vielfaches wiederum in der Grundquadratseite: $99:8\frac{1}{4} = 12$, aber ebenso in der Gesamtbreite der Hagia Sophia zu finden ist: $231:8\frac{1}{4} = 28$ und weitere relevante Achsen und Strecken bestimmt.

Es erscheint daher nicht überraschend, dass diese eng miteinander verwobenen Maße, obwohl vorrangig für die Berechnung der Kuppelgeometrie entwickelt, auch in der Grundrissebene miteinander korrespon-

⁹¹ Die Halbkugeloberfläche für den unteren Bereich: $A = 2\pi \cdot r^2 = 2 \cdot 22/7 \cdot 70^2 = 30\,800$. Mit der Formel, für Kugelabschnitte lassen sich nun deren Mantelflächen berechnen: $A = 2\pi \cdot r \cdot h = 44/7 \cdot 70 \cdot 20\frac{1}{2} = 9020$; diese Fläche $\cdot 3 = 27060$ und subtra-

hiert von der Halbkugelfläche; $30\,800 - 27\,060 = 3740$; d. i. die Gesamtfläche der Pendentifs; $17325 + 3740 = 21065$; das entspricht der gesamten Innenfläche der Pendentifkuppel.
⁹² Heron, Geodaesia fol. 48v; fol. 49v.

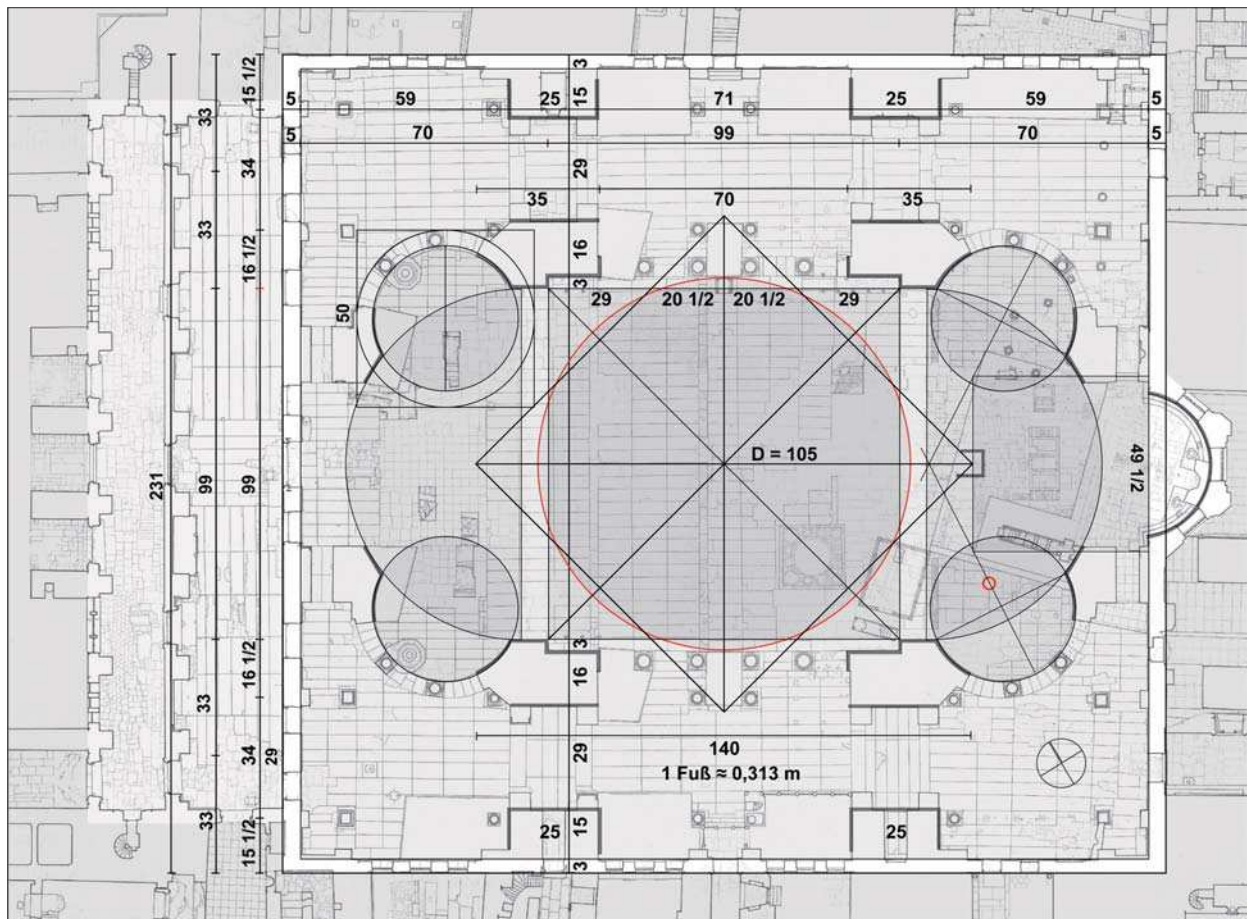


Abb. 22 Hagia Sophia, Grundriss mit den wichtigsten Maßangaben.

dieren, obwohl sie dort für die Systematisierung des Bauplanes gänzlich andere Aufgaben zu leisten haben. So spiegelt sich der Kuppeldurchmesser auch im Plan des Erdgeschosses, nämlich als nördliche und südliche Einschnürung in den großen Pfeilern, dort wo die monumentalen Arkaden den Hauptraum von den Seitenschiffen scheiden. Die lichte Weite zwischen diesen Pfeilerrücksprüngen beträgt in Querrichtung des Baus knapp 33m und misst damit ebenfalls 105 F. So wie die Diagonale des Grundquadrates ($3 \cdot 35 \text{ F} = 140 \text{ F}$) als konstituierendes Maß für die Gliederung der Hauptpfeiler im Primärsystem verantwortlich ist, so dient das Maß des Kuppeldurchmessers (105 F) der Fixierung der großen Säulen im Grundrissplan. Ihre Jochweite beträgt genau 15 F, ein Wert, der sich weder durch einfache Teilung der Seite noch aus der Diagonale des Grundquadrates ergibt, da keines der beiden Maße durch 15 teilbar ist. Aber der Kuppeldurchmesser, der genau um ein Viertel kleiner als die Grundquadratdiagonale ist ($140 \text{ F} - 35 \text{ F} = 105 \text{ F}$), lässt sich genau 7mal durch 15 teilen und gliedert damit das sekundäre Stützensystem der großen Säulenarkaden (**Abb. 21**). Aber auch bei diesem Verfahren lässt sich eine geometrische »Überbestimmung« feststellen, denn der Kuppelkreis und sein ihn umschließendes Quadrat korrespondieren in mannigfacher Weise mit dem um insgesamt 6 F Seitenlänge kleineren ($105 \text{ F} - 99 \text{ F} = 6 \text{ F}$) Grundquadrat bzw. mit seiner Erweiterung, dem zu Beginn der Erläuterungen eingeführten Oktogramm. Ebenso wie bei der Koordinatenbestimmung des Konchenmittelpunktes, sind es auch hier wieder Schnittpunkte der sich überlagernden Figuren, die, geome-

trisch und exakt mit ganzzahligen Werten berechenbar, wichtige Achsen im Gefüge des Baues festlegen⁹³ (Abb. 22).

SCHLUSSBEMERKUNG

Wie tief greifend dieses Vermessungssystem die Gesamtanlage der Hagia Sophia bestimmt, ihre geometrische Komplexität objektiviert und damit erst planbar macht, ist als Überblick bereits an anderer Stelle gezeigt worden⁹⁴. Die hier ausgewählten und eingehender betrachteten Details sollen veranschaulichen, mit welcher Rationalität spätantike Architekten und Ingenieure, namentlich Anthemios von Tralleis und Isidor von Milet bei der Planung eines solch anspruchsvollen Baus vorgegangen sind. Dabei konnten sich die beiden Planer auf ein breites Fundament theoretischen und praktischen Wissens stützen, an dessen Rezeption und Weiterentwicklung sie ebenfalls aktiv beteiligt waren. Vor allem in den Handbüchern Herons von Alexandria stand ihnen ein umfangreiches geodätisches Instrumentarium zur Verfügung, in dem Erfahrungen und Kenntnisse eingelagert waren, die bis in die altbabylonische Zeit des 2. Jahrtausends v. Chr. zurückreichen. Eine Besonderheit dieses alten und offensichtlich auch kontinuierlich von den verschiedenen Kulturen verwendeten Wissens ist darin zu sehen, zahlenmäßig nicht erfassbare geometrische Figuren und Körper durch die Verwendung unterschiedlicher rationaler Näherungswerte und sogenannter pythagoräischer Zahlentripel⁹⁵ berechnen- und damit auch messbar zu machen. Hierbei kristallisierten sich in der praktischen Anwendung zwei für die gesamte Antike und Nachantike dominierende Methoden heraus: das Approximationsverfahren für $\sqrt{2}$ anhand der Seiten- und Diagonalzahlreihe sowie die Kreis- und Kugelberechnungen mit dem vereinfachten π -Wert. Beide Verfahren sind gekennzeichnet durch die Verwendung einer Reihe immer wiederkehrender rationaler »Systemzahlen«, die in bestimmten und, wie gezeigt, auch verschränkten Proportionen zueinander stehen.

Um komplexere Aufgaben bewältigen zu können, war es notwendig, die – wie in Schul- und Lehrbüchern üblich – als Einzelprobleme isolierten Aufgabenstellungen aufeinander abzustimmen oder kreativ zu kombinieren. Als Ergebnis dieses schöpferischen Prozesses steht, wie hier, ein Bauwerk, in dessen Maßen und geometrischen Strukturen, je nach Erhaltungszustand, diese Transformationsleistung identifizierbar ist. Als Quelle individueller Verarbeitung allgemeinen Wissens und persönlicher Erfahrung kann es wiederum nur im Kontext dieses Wissens, also nur vor dem Hintergrund der hierfür relevanten zeitgenössischen Quellen verstanden werden. Diese besagen nun, dass für bestimmte räumliche Formationen ein Repertoire von Zahlen zur Verfügung stand, die sich innerhalb ihrer Systematik durch festgelegte Proportionen definieren lassen, wie dies für Quadrate und den hiervon abhängigen geometrischen Figuren anhand der Seiten- und Diagonalzahlreihe deutlich gezeigt werden konnte. Bei Kreis- und Kugelberechnungen, ohne die keine Gewölbeform entwickelt werden kann, wurden dagegen Dimensionen gewählt, deren Maße wiederum mit dem Näherungswert $22/7$ kompatibel sind. Bei dem räumlichen Gefüge der Hagia Sophia aber, dessen planarisches Konzept durch Kombination unterschiedlicher geometrischer Figuren gekennzeichnet ist,

⁹³ So schneidet der auf den Grundriss projizierte Kuppelkreis ($d = 105$) das um 45° gedrehte Grundquadrat ($s = 99$) einer Stelle, die in Querrichtung mit einander verbunden, präzise die Achsen der jeweils äußeren Säulen fixieren. Dies ist jedoch kein geometrischer »Zufallsfund«, sondern zeigt die Kompatibilität zwischen den »Proportionen« der beiden Figuren.

⁹⁴ Siehe oben Anm. 83.

⁹⁵ Rechtwinklige Dreiecke mit rationalen, ganzzahligen Seiten: Heron, *Geometrica* 8-9 berechnet diese Dreiecke nach der Pythagoräischen und Platonischen Methode, je nachdem, ob man von einer ungeraden oder einer geraden Zahl ausgeht. Diese Dreiecke waren bereits den Babyloniern bekannt. Eine umfangreiche Liste solcher Zahlentripel befindet sich auf der Keilschrifttafel Plimpton 322 (Bibliothek der Columbia-Universität, New York): Neugebauer / Sachs, *Cuneiform Texts* 37-41 Taf. 24.

mussten die damit verbundenen Zahlensysteme erst harmonisiert und zu einem gemeinsamen Ganzen zusammengefasst werden. In seinem Gesamtentwurf aber offenbart sich die eigentliche Symmetrie des Bauwerks und zwar in genau dem Sinn, wie Vitruv sie für die Konzeption der Tempel als zwingendes Ordnungsprinzip reklamiert. Dabei ist das geordnete, weil berechenbare Zusammenspiel aller Glieder erst die Voraussetzung für die objektivierende Wahrnehmung (z.B. die Vermessung) von Architektur: denn als »aistheton soma«, als sinnlicher Körper kann erst wahrgenommen und erfasst werden, was »aussprechbar«, also dokumentier- und reproduzierbar, in der Begrifflichkeit der antiken Geodäsie und damit zugleich in der Sprache von Architekten und Ingenieuren mit einem System von rationalen Zahlen zu beschreiben ist. Mit dieser vornehmlich durch die Schriften Herons erschließbaren »mathematischen Dimension« des Symmetriebegriffes lassen sich die Bauwerke des Altertums unter einem völlig neuen Blickwinkel betrachten.

Deshalb ist es nicht überraschend, dass zahlreiche weitere antike und spätantike Zentralbauten in ihren Formaten sehr ähnlich und/oder modular verwandt erscheinen, da eben nur ausgewählte Zahlenwerte – »Monadensysteme«⁹⁶ – für bestimmte geometrische Formen in Frage kommen. So ist das Grundquadrat, aus dem das zentrale Oktagon der fast zeitgleich entstandenen Kirche der Hll. Sergios und Bakchos in Istanbul entwickelt wurde, mit einer gemessenen Seitenlänge von 15,45m⁹⁷ fast genau halb so groß wie das der Hagia Sophia. Ebenfalls in diesen Kontext gehört die justinianische Kirche San Vitale in Ravenna, deren achteckiger Kern nur geringfügig von den Maßen der Sergius-und-Bacchus-Kirche abweicht, sodass auch sie zu dem »System der Symmetrien« gezählt werden kann⁹⁸. Und schließlich fügt sich auch die zeitlich weit entfernte Kuppel des Pantheons in diese Reihe, denn ihr Durchmesser von ungefähr 43,5m ist nur knapp 30cm kürzer als die Diagonale zwischen den Pfeilern der Hagia Sophia, die zugleich den Durchmesser der auf die Pendentifs reduzierten großen Kuppel definiert⁹⁹.

Doch erst mit den Architekten der Hagia Sophia, deren außergewöhnliche Entwurfs- und Planungsleistung explizit mit heronischem Wissen und den daraus abgeleiteten allgemein verbindlichen Regeln in Zusammenhang gebracht werden kann, wurde auch der Weg zu einer Quelle erschlossen, die sich nun für das Verständnis der gesamten antiken Architektur als unverzichtbare Grundlage erweist. Nur mit ihrer Kenntnis sind die Prozesse zu rekonstruieren, die für die Übersetzung einer Planungsidee ins reale, überlieferte Bauwerk notwendig waren. Die Hagia Sophia ist daher ein singuläres Beispiel, mit dem sich in einzigartiger Weise schriftliche und architektonische Überlieferung wechselseitig erschließen und ergänzen lassen; sie eröffnet zugleich ein völlig neues Interpretationsmodell für die antike Planungspraxis.

LITERATURVERZEICHNIS

Quellen

- | | |
|--|---|
| Cassiodor, <i>Selected Variae: Selected Variae of Magnus Aurelius Cassiodorus Senator</i> . Herausgegeben von S. J. B. Barnish (Liverpool 1992). | (Cod. Guelf. 36.23 A). Herausgegeben von H. Butzmann (Wolfenbüttel 1970). |
| Cassiodor, <i>Variae: Cassiodori Senatoris Variae</i> . In: Th. Mommsen (Hrsg.), <i>Monumenta Germaniae Historica</i> 12 (Berlin 1894). | Codex Constantinopolitanus: <i>Codex Constantinopolitanus Palatii Veteris</i> No. 1. Bd. 1-3. Herausgegeben von E. M. Bruins (Leiden 1964). |
| Codex Arcerianus: <i>Corpus Agrimensorum Romanorum</i> . Codex Arcerianus A der Herzog-August-Bibliothek zu Wolfenbüttel | Diels / Kranz, <i>Fragmente</i> : H. Diels / W. Kranz, <i>Die Fragmente der Vorsokratiker</i> (Dublin, Zürich 1951-1952). |

⁹⁶ Svenshon / Stichel, *Monads*.

⁹⁷ Nach Messungen im Rahmen einer fotogrammetrischen Gesamtaufnahme: Svenshon / Stichel, *Beobachtungen* 391-392 Anm. 12; 14.

⁹⁸ Deichmann, *Ravenna* 27.

⁹⁹ Martines, *Pantheon* 15.

- Estienne / Liébault, Feldbau: C. Estienne / J. Liébault, Siben Bücher Von dem Feldbau, und vollkommener bestellung eynes ordentlichen Mayerhofs oder Landguts (Strassburg 1579).
- Gregor, Reden: Des Heiligen Bischofs Gregor von Nazianz Reden. Herausgegeben von Ph. Haeuser (München 1928).
- Heron, Definitiones: Heron Alexandrinus 4. Heronis definitiones cum variis collectionibus Heronis quae feruntur geometrica. Herausgegeben von J. L. Heiberg (Stuttgart 1912; Nachdruck 1976).
- Heron, Druckwerke: Heron Alexandrinus 1. Pneumatica et automata. Herausgegeben von W. Schmidt (Stuttgart 1899; Nachdruck 1976).
- Heron, Geodaesia: Siegecraft. Two Tenth-Century Instructional Manuals by »Heron of Byzantium«. Herausgegeben von D. F. Sullivan (Washington DC 2000).
- Heron, Geometrica: Heron Alexandrinus 4. Heronis definitiones cum variis collectionibus Heronis quae feruntur geometrica. Herausgegeben von J. L. Heiberg (Stuttgart 1912; Nachdruck 1976).
- Heron, Mechanik: Heron Alexandrinus 2. Mechanica et catoptrica. Herausgegeben von L. Nix / W. Schmidt (Leipzig 1900; Nachdruck 1976).
- Heron, Metrika: Heron Alexandrinus 3. Rationes dimetiendi et commentatio dioptrica. Herausgegeben von H. Schöne (Stuttgart 1903; Nachdruck 1976).
- Heron, Stereometrika: Heron Alexandrinus 5. Heronis quae feruntur stereometrica et de mensuris. Herausgegeben von J. L. Heiberg (Stuttgart 1914; Nachdruck 1976).
- Hultsch, Exkurse: F. Hultsch, Drei Exkurse. In: W. Kroll (Hrsg.), Procli Diadochi in Platonis rem rem publicam commentarii (Leipzig 1901) 384-414.
- Malalas, Chronicle: The Chronicle of John Malalas. Australian Association for Byzantine Studies. In: E. Jeffreys et al. (Hrsg.), Byzantina Australiensia 4 (Melbourne 1986).
- Paulus Silentiarius, Sophia: Paulus Silentiarius, descriptio S. Sophiae et ambonis (griech.-dt). In: O. Veh (Hrsg.), Prokopios. Werke 5: Die Bauten (München 1977) 306-380.
- Platon, Res Publica: Platon. Sämtliche Werke 3. Phaidon, Politeia. Herausgegeben von W. F. Otto et al. (Hamburg 1958).
- Prokop, Bauten: Prokop, Die Bauten, Prokopios Werke 5: Die Bauten. Herausgegeben von O. Veh (München 1977).
- Rivius, Architectur: G. H. Rivius, Der furnembsten notwendigsten der ganzen Architectur angehörigen mathematischen und mechanischen Kunst eygentlicher Bericht und verständliche Unter-richtung Geometrischer Messung das 1. Buch (Nürnberg 1547; Nachdruck Hildesheim, New York 1981).
- Thomas, Pappus: Greek Mathematical Works 2. Aristarchus to Pappus of Alexandria. Herausgegeben von I. Thomas (Cambridge/Mass. ⁴1968).
- Thomas, Thales: Greek Mathematical Works 1. Thales to Euclid. Herausgegeben von I. Thomas (Cambridge/Mass. ⁵1980).
- Vitruv, Architektur: Vitruv, Zehn Bücher über Architektur. Herausgegeben von C. Fensterbusch (Darmstadt ³1984).

Literatur

- Afanasiev, Analyse: K. N. Afanasiev, Geometričeskii analiz chrama sv. Sophii v Konstantinopole. Geometrische Analyse der Kirche der H. Sophia in Konstantinopel. Vizantijskij Vremennik 5, 1952, 207-215.
- Antoniades, Ekphrasis: E. M. Antoniades, Ekphrasis tes Hagia Sophias (Leipzig, Athen 1907-1909; Nachdruck 1983).
- Asper, Dionysius: M. Asper, Dionysius (Heron, Def. 14.3) und die Datierung Herons von Alexandria. Hermes 129, 2001, 135-137.
- Berggren, Approximations: L. Berggren, Some Ancient and Medieval Approximations to Irrational Numbers and Their Transmission. In: Y. Dold-Samplonius (Hrsg.), From China to Paris. 2000 Years Transmission of Mathematical Ideas (Stuttgart 2002) 31-44.
- Birnbaum, Didyma: J. Birnbaum, Der Apollontempel von Didyma. Analyse einer pythagoreisch-platonischen Entwurfskonzeption [unveröff. Diss., TU Berlin, Berlin 2006].
- Bruins / Rutten, Suse: E. M. Bruins / M. Rutten, Textes Mathématiques de Suse (Paris 1961).
- Cameron, Isidore: A. Cameron, Isidore of Miletos and Hypatia: On the Editing of Mathematical Texts. Greek, Roman and Byzantine Studies 31, 1990, 103-127.
- Cantor, Vorlesungen: M. Cantor, Vorlesungen zur Geschichte der Mathematik 1. Von den ältesten Zeiten bis zum Jahre 1200 (Leipzig ³1907).
- Damerow, Pythagoras: P. Damerow, Kannten die Babylonier den Satz des Pythagoras? Epistemologische Anmerkungen zur Natur der babylonischen Mathematik. In: J. Høyrup / P. Damerow, Changing Views on Ancient Near Eastern Mathematics. Berliner Beiträge zum Vorderen Orient 19 (Berlin 2001) 219-310.
- Darmstaedter, Anthemios: E. Darmstaedter, Anthemios und sein »künstliches« Erdbeben. Philologus 84, N. F. 42, 1933, 477-482.
- Dehio, Proportionsgesetz: G. Dehio, Proportionsgesetz der antiken Baukunst und sein Nachleben im Mittelalter und in der Renaissance (Strassburg 1895).
- Deichmann, Ravenna: F. W. Deichmann, Ravenna 2 (Wiesbaden 1972).
- DiskAB, Bauplanung: Antike und Bauplanung. Diskussionen zur Archäologischen Bauforschung 4 (Berlin 1984).
- Downey, Architects: G. Downey, Byzantine Architects, Their Trainings and Methods. Byzantion 18, 1946-1948, 99-118.
- Downey, Pappus: G. Downey, Pappus of Alexandria on Architectural Studies. Isis 38/3-4, Feb. 1948, 197-200.
- Drachmann, Heron: A. G. Drachmann, Heron and Ptolemaios. Centaurus 1, 1950-1951, 117-131.
- Emerson / van Nice, Report: W. Emerson / R. L. van Nice, Hagia Sophia, Istanbul: Preliminary Report of a Recent Examination of the Stucture. American Journal of Archaeology 47, 1943, 403-436.
- Filep, Numbers: L. Filep, Pythagorean Side and Diagonal Numbers. Acta Mathematica Academiae Paedagogicae Nyíregyháziensis 15, 1999, 1-7.
- Folkerts, Heron: M. Folkerts, s. v. Heron, Der Neue Pauly, Enzyklopädie der Antike 5 (1998) Sp. 480-483.

- Fowler / Robson, Approximations: D. Fowler / E. Robson, Square Root Approximations in Old Babylonian Mathematics: YBC 7289 in Context. *Historia Mathematica* 25, 1998, 366-378.
- Friberg, Links: J. Friberg, Unexpected Links between Egyptian and Babylonian Mathematics (New Jersey u.a. 2005).
- Friberg, Traces: J. Friberg, Amazing Traces of a Babylonian Origin in Greek Mathematics (New Jersey u.a. 2007).
- Gericke, Mathematik: H. Gericke, Mathematik in Antike, Orient und Abendland (Berlin, Heidelberg 1984; Nachdruck Wiesbaden 2003).
- Hammer-Jensen, Heron: I. Hammer-Jensen, Ptolemaios und Heron. *Hermes* 48, 1913, 224-235.
- Heiberg, Mathematici: J. L. Heiberg, Mathematici graeci minores. Det Kgl. Danske Videnskabernes Selskab. *Historsk-filologiske Meddelelser* 13/3, 1927, 1-107.
- Heller, Teilung: S. Heller, Die Entdeckung der stetigen Teilung. In: O. Becker (Hrsg.), *Zur Geschichte der griechischen Mathematik* (Darmstadt 1965) 319-354.
- Heller, Theodoros: S. Heller, Ein Beitrag zur Deutung der Theodoros-Stelle in Platons Dialog »Theaetetus«. *Centaurus* 5/1, 1956-1958, 1-58.
- Herz-Fischler, Number: R. Herz-Fischler, A Mathematical History of Division in Extreme and Mean Ratio (Waterloo/Ont., Canada 1987).
- Hoffmann, Entwurf: V. Hoffmann (Hrsg.), *Der geometrische Entwurf der Hagia Sophia in Istanbul. Bilder einer Ausstellung* (Bern u.a. 2005).
- Hoffmann, Sophia: V. Hoffmann, Bauen vor 1500 Jahren: Die Hagia Sophia. *Forschung und Wissenschaft an der Universität Bern* 104, April 2000, 13-16.
- Hoffmann / Theocharis, Entwurf: V. Hoffmann / N. Theocharis, *Der geometrische Entwurf der Hagia Sophia in Istanbul. Erster Teil. Istanbulische Mitteilungen* 52, 2002, 392-428.
- Hørup, Dynamis: J. Hørup, Dynamis, the Babylonians, and Theaetetus 147c7-148d7. *Historia Mathematica* 17 (1990) 201-222.
- Høyrup, Lengths: J. Høyrup, Lengths, Widths, Surfaces. A portrait of Old Babylonian Algebra and Its Kin (New York 2002) 234.
- Humpert / Schenk, Stadtplanung: K. Humpert / M. Schenk, Entdeckung der mittelalterlichen Stadtplanung. *Das Ende vom Mythos der »gewachsenen Stadt«* (Stuttgart 2001).
- Hunger, Literatur: H. Hunger, Die hochsprachliche profane Literatur der Byzantiner. *Byzantinisches Handbuch im Rahmen des Handbuchs der Altertumswissenschaften* 5/2 (München 1978).
- Huxley, Anthemios: G. L. Huxley, Anthemios of Tralles. A Study in Later Greek Geometry (Cambridge/Mass. 1959).
- Jouven, Ichnographie: G. Jouven, Ichnographie de Sainte-Sophie de Constantinople. *Construction Moderne* 61 (1946) 273-275.
- Jouven, Rythme: G. Jouven, Rythme et Architecture. *Les Tracés Harmoniques* (Paris 1951).
- Junecke, Proportionen: H. Junecke, Proportionen der Hagia Sophia in Istanbul. In: H. Junecke, *Proportionen frühchristlicher Basiliken des Balkans im Vergleich von zwei unterschiedlichen Messverfahren* (Tübingen 1983) 55-71.
- Klein, Logistik: J. Klein, Die griechische Logistik und die Entstehung der Algebra. *Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Astronomie und Physik. Abt. B 3/1* (Berlin 1934) 18-105; *3/2* (Berlin 1936) 122-235.
- Krafft, Kunst: F. Kraft, Kunst und Natur. Die Heronische Frage und die Technik in der Klassischen Antike. In: U. Fleischer et al. (Hrsg.), *Antike und Abendland* 19 (Berlin, New York 1973) 1-19.
- Krøstrup, Anthemios: M. Krøstrup, Le Corbusier og Anthemios fra Tralles. *Arkitekten* 87, 1985, 445-453.
- Maillard, Sainte-Sophie: E. Maillard, Sainte-Sophie de Constantinople et son Baptistère. In: E. Maillard, *Les Cahiers du Nombre d'Or 2. Églises Byzantines* (Paris 1962) 11-23.
- Mainstone, Sophia: R. J. Mainstone, Hagia Sophia. Architecture, Structure and Liturgy of Justinian's Great Church (London, New York 1988).
- Martines, Pantheon: G. Martines, Argomenti Di Geometria Antica A Proposito Della Cupola Del Pantheon. In: »Quaderni dell'Istituto di Storia dell'Architettura«, Fasc. 13 (Rom 1989).
- Meek, Architect: H. A. Meek, The Architect and his Profession in Byzantium. *Journal of the Royal Institute of British Architects* 59, 1951-1952, 216-220.
- Meißner, Fachliteratur: B. Meißner, *Die technologische Fachliteratur der Antike* (Berlin 1999).
- Meyer-Christian, Sophia: W. Meyer-Christian, Hagia Sophia, the Engineers Planning of Anthemios and Isidoros, Reconstruction. In: Mimar Sinan University, Istanbul (Hrsg.), *Domes from Antiquity to the Present, Proceedings of IASS – MSU Symposium [Istanbul 1988]* (Istanbul 1988) 173-181.
- Netz / Noel, Archimedes: R. Netz / W. Noel, *Der Kodex des Archimedes* (München 2007).
- Neugebauer, Approximation: O. Neugebauer, Über die Approximation irrationaler Quadratwurzeln. *Archiv für Orientforschung* 7/4, 1931, 90-99.
- Neugebauer, Keilschrift-Texte: O. Neugebauer, *Mathematische Keilschrift-Texte. Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Astronomie und Physik. Abt. A 3* (Berlin 1935).
- Neugebauer, Methode: O. Neugebauer, Über eine Methode zur Distanzbestimmung Alexandria – Rom bei Heron. Det Kgl. Danske Videnskabernes Selskab. *Historsk-filologiske Meddelelser* 26/2, 1938, 1-26.
- Neugebauer / Sachs, Cuneiform Texts: O. Neugebauer / A. Sachs, *Mathematical Cuneiform Texts* (New Haven/Con. 1945).
- Neugebauer / Waschow, Quadratwurzeln: O. Neugebauer / H. Waschow, Bemerkungen über Quadratwurzeln und Quadratwurzel-Approximation in der babylonischen Mathematik. *Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik Astronomie und Physik. Abt. B 1/3* (Berlin 1932) 294-295.
- Pantellic, Sophia: B. Pantellic, Applied geometrical planning and proportions in the church of Hagia Sophia in Istanbul. *Istanbulische Mitteilungen* 49, 1999, 493-515.
- Radke, Zahl: G. Radke, Die Theorie der Zahl im Platonismus. Ein systematisches Lehrbuch (Tübingen, Basel 2003).
- Robson, Mathematics: E. Robson, Mesopotamian Mathematics, 2100-1600 BC. Technical Constants in Bureaucracy and Education (Oxford 1999).
- Saggs, Geometrical Text: H. W. F. Saggs, A Babylonian Geometrical Text. *Revue d'Assyriologie* 54, 1960, 131-145.
- Sato et al., Characteristics: T. Sato / K. Hidaka / Y. Kawabe / T. Aoki / K. Yamashita, Formal characteristics of the setting lines on the cornice of the main dome of Hagia Sophia, Istanbul. *Nihon-Kenchiku-Gakkai-keikakukei-ronbunshu*, Gakkai July, 1996, 219-226.

- Schilbach, Metrologie: E. Schilbach, Byzantinische Metrologie. Byzantisches Handbuch im Rahmen des Handbuchs der Altertumswissenschaften 4 (München 1970).
- Schneider, Hagia Sophia: A. M. Schneider, Die Hagia Sophia (Berlin 1939).
- Schuler, Vitruv: S. Schuler, Vitruv im Mittelalter, die Rezeption von »De Architectura« von der Antike bis in die Frühe Neuzeit (Köln u.a. 1999).
- Senseney, Kos: J. R. Senseney, Idea and Visuality in Hellenic Architecture. A Geometric Analysis of Temple A of the Asklepieion at Kos. *Hesperia* 76, 2007, 555-595.
- Smiley, Roots: J. G. Smily, Square Roots in Heron of Alexandria. *Hermathena* 63, 1944, 18-26.
- Stanzl, Längsbau: G. Stanzl, Längsbau und Zentralbau als Grundthemen der frühchristlichen Architektur. Österreichische Akademie der Wissenschaften, philosophisch-historische Klasse. Denkschriften 139 (Wien 1979).
- Svenshon, Oktagon: H. Svenshon, Das unsichtbare Oktagon: Überlegungen zum Grundrissentwurf der Hagia Sophia in Konstantinopel. In: *Almanach Architektur 1998-2002: Lehre und Forschung an der Technischen Universität Darmstadt* (Tübingen 2003) 234-243.
- Svenshon / Stichel, Beobachtungen: H. Svenshon / R. H. W. Stichel, Neue Beobachtungen an der ehemaligen Kirche der Heiligen Sergios und Bakchos (Küçük Aya Sofya Camii) in Istanbul. *Istanbuler Mitteilungen* 50, 2000, 389-409.
- Svenshon / Stichel, Einblicke: H. Svenshon, Einblicke in den virtuellen Himmel. Neue und alte Bilder vom Inneren der Hagia Sophia in Istanbul [eine Ausstellung der Universitäts- und Landesbibliothek Darmstadt, 19. Februar bis 20. März 2008] Text und Katalog Rudolf H. W. Stichel (Tübingen 2008).
- Svenshon / Stichel, Monads: H. Svenshon / R. H. W. Stichel, Systems of Monads' as Design Principle in the Hagia Sophia: Neoplatonic Mathematics in the Architecture of Late Antiquity. In: Sylvie Duvernoy / Orietta Piedemonte, *Nexus VI. Architecture and Mathematics* (Torino 2006) 111-120.
- Svenshon / Stichel, Oktagon: H. Svenshon / R. H. W. Stichel, Das unsichtbare Oktagon und die Kuppel an der »goldenen Kette«. Zum Grundrissentwurf der Hagia Sophia in Konstantinopel und zur Deutung ihrer Architekturform. Bericht über die Tagung für Ausgrabungswissenschaft und Bauforschung [Koldey-Gesellschaft] 42 [2002] (Bonn 2004) 187-205.
- Tavano, Unità: S. Tavano, Unità e originalità dell'architettura giustiniana. In: *Actes du 10. Congrès International d'Archéologie Chrétienne 2* [Thessalonique 28. Septembre - 4. Octobre 1980] (Città del Vaticano/Rom 1984) 543-561.
- Terrien, Architecture: M.-P. Terrien, Religious architecture and Mathematics during the Late Antiquity. In: T. Koetsier / L. Bergmans (Hrsg.), *Mathematics and the Divine: A Historical Study* (Amsterdam u.a. 2005) 147-160.
- Tittel, Heron: K. Tittel, s.v. Heron (5). *Paulys Realencyclopädie der Classischen Altertumswissenschaften* 8 (1912) Sp. 992-1080.
- Trinci, Sofia: R. Trinci, S. Sofia in Constantinopoli e la Divina Proporzione. In: *Actes du 10. Congrès International d'Archéologie Chrétienne 2* [Thessalonique 28. Septembre - 4. Octobre 1980] (Città del Vaticano/Rom 1984) 587-604.
- Van Nice, Survey: R. L. van Nice, Saint Sophia in Istanbul. An architectural survey. (Washington DC 1965, 1986).
- Vogel, Mathematik: K. Vogel, Vorgriechische Mathematik 2 (Würzburg 1959).
- Waerden, Wissenschaft: B. L. v. d. Waerden, Erwachende Wissenschaft (Basel 1956).
- Waschkies, Hypothese: H.-J. Waschkies, Eine neue Hypothese zur Entdeckung der inkommensurablen Größen durch die Griechen. *Archive for History of Exact Sciences* 7, 1970-1971, 325-353.
- Waugh / Maxfield, Numbers: F. W. Waugh / M. W. Maxfield, Side-and-Diagonal Numbers. *Mathematics Magazine* 40/2, Mar. 1967, 74-83.
- Westerink, Elias: L. G. Westerink, Elias on the Prior Analytics. *Mnemosyne* S. 4/14, 1961, 126-129.

ABBILDUNGSNACHWEIS

- Abb. 1, 9 H. Svenshon.
- Abb. 2 Svenshon / Stichel, Einblicke Abb. 64.
- Abb. 3 Van Nice, Survey Pl. 9-11.
- Abb. 4 Schneider, Hagia Sophia Abb. 22.
- Abb. 5 Codex Constantinopolitanus fol. 9r.
- Abb. 6 Codex Constantinopolitanus fol. 9r.
- Abb. 7 Van Nice, Survey Pl. 5.
- Abb. 8 Codex Constantinopolitanus fol. 46r.
- Abb. 10 Codex Constantinopolitanus fol. 65r.
- Abb. 11, 20 M. Kim.
- Abb. 12 Nach van Nice, Survey.
- Abb. 13 Heron, Geodaesia fol. 48v.
- Abb. 14 Heron, Geodaesia fol. 49v.
- Abb. 15 Nach Van Nice, Survey.
- Abb. 16 Codex Arcerianus 12r.
- Abb. 17-19, 21-22 Nach Van Nice, Survey.

ZUSAMMENFASSUNG / ABSTRACT / RÉSUMÉ

Die breite architekturgeschichtliche Rezeption Vitruvs hat in besonderem Maße dazu beigetragen, dass entscheidende und für das Verständnis antiker Entwurfs- und Planungsprozesse unverzichtbare Wissensfelder bis heute unberücksichtigt geblieben sind. Obwohl in seinem Werk die unterschiedlichsten Rezepturen für den Entwurf idealtypischer, modularisierter Architektur diskutiert werden, bleibt doch die Frage nach den mathematischen und technischen Grundlagen ihrer Transformation ins reale Bauwerk, d.h. die praktische Umsetzung auf der Baustelle mit all ihren Erfordernissen, wie Bauvermessung und Logistik unbeantwortet. Über welches Wissen antike und spätantike Architekten oder Ingenieure aber tatsächlich verfügen mussten, um ihren Entwürfen erst den rational fassbaren maßlichen Rahmen zu geben, der aus den gedanklichen Konstrukten plan- und berechenbare Bauwerke entstehen ließ, bleibt bis heute ein weitgehend ungelöstes Problem.

Die Auseinandersetzung mit der Hagia Sophia (532-537) und ihren Architekten Anthemios von Tralleis und Isidor von Milet führt zu einer bedeutenden Quelle, mit der diese Wissenslücke nachhaltig gefüllt werden kann und die sich für das Verständnis der gesamten antiken Architektur als unverzichtbare Grundlage erweist. Spätantike Zeugnisse und vor allem die Struktur des Baues selbst belegen, dass die außergewöhnliche Entwurfs- und Planungsleistung mit den technologischen Schriften Herons von Alexandria in Verbindung zu bringen ist. Unter seinem Namen verbreiteten sich vom 1. Jahrhundert n. Chr. bis in das byzantinische Mittelalter Handbücher für Ingenieure unterschiedlicher Fachdisziplinen, deren systematisch zusammengestellte Aufgabensammlungen auch allen am Bau beteiligten Berufsgruppen verbindliche Berechnungsinstrumente zur Verfügung stellten. Insbesondere Herons Vermessungslehre und seine nachweislich von Isidor bearbeitete Schrift über Gewölbe können als Grundlage für Planung und Bau veranschlagt werden. Nur mit der Kenntnis dieser Schriften sind die Prozesse zu rekonstruieren, die für die Übersetzung einer Planungs-idee ins reale, überlieferte Bauwerk notwendig waren. Die Hagia Sophia ist daher ein singuläres Beispiel, mit dem sich in einzigartiger Weise schriftliche und architektonische Überlieferung wechselseitig erschließen und ergänzen lassen; sie eröffnet zugleich ein völlig neues Interpretationsmodell für die antike Planungspraxis.

The broad reception of Vitruvius in architectural history has especially accounted for the fact that fields of knowledge essential for the understanding of ancient processes of design and planning remain hitherto unconsidered. Although Vitruvius discusses various methods for designing ideal type and modularised architecture the question of mathematical and technical basics for creating a real building is still open, i.e. the practical transformation on the actual building site with all its needs such as architectural surveying and logistics. An as yet widely unsolved problem is which knowledge enabled antique and late antique architects and engineers to provide the rationally comprehensive frame needed to make the theoretical constructions calculatable and plannable buildings.

The study of the Hagia Sophia (532-537) and its architects Anthemius of Trallis and Isidore of Miletus leads us to an important source which can fill this gap of knowledge effectively and which proved to be an indispensable basis for understanding ancient architecture in its whole. Late antique sources and primarily the structure of the building itself document that the exceptional achievements of design and planning must be associated with the writings of Heron of Alexandria. From the 1st century AD to the Byzantine period in his name handbooks for engineers of various disciplines were distributed which provided obligatory instruments of calculation with systematically compiled tasks for all groups of profession engaged in building. Particularly Heron's scientific discipline of surveying and his treaty on vaults demonstrated to be revised by Isidore, can be assessed as a basis for planning and building. Only if knowing these sources the processes necessary for transforming an ideal plan into a real still existing construction can be reconstructed. The Hagia Sophia therefore is a unique example in which written sources and architectural remains can be analysed and complement each other in a singular way; at the same time it establishes an entirely new model of interpretation for ancient planning praxis.

M. S.

La vaste réception de l'histoire de l'architecture de Vitruve a contribué en une proportion particulière, à ce que des éléments déterminants pour la compréhension d'antiques dessins et procédés d'aménagements n'aient pas été pris en compte dans les indispensables champs de la connaissance. Même si dans son œuvre sont discutées les différentes compositions pour une architecture typique idéale et modulaire, la question, après les données mathématiques et techniques, de leur transformation dans la construction réelle c'est-à-dire la réalisation pratique sur le chantier avec tous les impératifs comme le mesurage et la logistique, reste sans réponse. Quel savoir sur l'antiquité et l'antiquité tardive, les architectes et ingénieurs devaient-ils détenir pour donner tout d'abord à leurs projets le cadre rationnel et mesurable, dont un plan résultait de leur réflexion et de construction réalisable/calculable, reste jusqu'à nos jours un problème en grande partie non résolu.

La polémique autour d'Hagia Sophia (532-537) et ses architectes, Anthemios de Tralleis et Isidore de Milet, conduit à une source significative, avec laquelle cette lacune de la connaissance peut être ressentie durablement et s'avère pour la compréhension de l'ensemble de l'architecture antique comme une indispensable base. Des preuves tardo-antiques et avant tout la structure des constructions elle-même démontre que les dessins et les réalisations de plans avec la technologie de l'écriture d'Héron d'Alexandrie peuvent être mis en relation. Sous son nom se diffuse du I^{er} siècle avant Jésus Christ jusqu'au Moyen Age byzantin des manuels d'ingénieurs de disciplines et techniques différentes, qui rassemblaient l'ensemble des tâches, mais aussi pour mettre à disposition de toutes les corporations des métiers du bâtiment les instruments de calcul indispensables. En particulier la théorie de mesure d'Héron et les travaux écrits d'Isidore sur les voûtes peuvent être estimés comme étant les fondements de la conception des projets et des constructions. Seul la connaissance de ces écrits permet de reconstituer le processus de reconstruction, qui pour la transposition d'une idée conceptuelle en réalité, était nécessaire aux ouvrages. L'Hagia Sophia est par là un exemple singulier, qui de manière unique permet d'exploiter et de compléter des traditions écrites et architecturales et réciproquement. Elle ouvre en même temps un modèle d'interprétation entièrement neuf pour l'étude des pratiques de planifications antiques.

E. L.

*PD Dr.-Ing. Helge Svenshon
Fachbereich Architektur
Geschichte und Theorie der Architektur
Technische Universität Darmstadt
El-Lissitzky-Str. 1
D - 64287 Darmstadt
svenshon@gta.tu-darmstadt.de*

BYZANZ – DAS RÖMERREICH IM MITTELALTER

VERZEICHNIS DER BEITRÄGE

TEIL 1 WELT DER IDEEN, WELT DER DINGE

WELT DER IDEEN

Ernst Künzl

Auf dem Weg in das Mittelalter: die Gräber Constantins, Theoderichs und Chlodwigs

Vasiliki Tsamakda

König David als Typos des byzantinischen Kaisers

Umberto Roberto

The Circus Factions and the Death of the Tyrant: John of Antioch on the Fate of the Emperor Phocas

Stefan Albrecht

Warum tragen wir einen Gürtel? Der Gürtel der Byzantiner – Symbolik und Funktion

Mechthild Schulze-Dörrlamm

Heilige Nägel und heilige Lanzen

Tanja V. Kushch

The Beauty of the City in Late Byzantine Rhetoric

Helen Papastavrou

Classical Trends in Byzantine and Western Art in the 13th and 14th Centuries

WELT DER DINGE

Birgit Bühler

Is it Byzantine Metalwork or not? Evidence for Byzantine Craftsmanship Outside the Byzantine Empire (6th to 9th Centuries AD)

Isabella Baldini Lipolis

Half-crescent Earrings in Sicily and Southern Italy

Yvonne Petrina

Kreuze mit geschweiften Hasten und kreisförmigen Hastenenden

Anastasia G. Yangaki

The Scene of »the Holy Women at the Tomb« on a Ring from Ancient Messene and Other Rings Bearing the Same Representation

Ellen Riemer

Byzantinische und romanisch-mediterrane Fibeln in der Forschung

Aimilia Yeroulanou

Common Elements in »Treasures« of the Early Christian Period

Tivadar Vida

Zur Formentwicklung der mediterranen spätantik-frühbyzantinischen Metallkrüge (4.-9. Jahrhundert)

Anastassios Antonaras

Early Christian and Byzantine Glass Vessels: Forms and Uses

Binnur Gürler und Ergün Lafli

Frühbyzantinische Glaskunst in Kleinasien

Ronald Bockius

Zur Modellrekonstruktion einer byzantinischen Dromone (chelandion) des 10./11. Jahrhunderts im Forschungsbereich Antike Schifffahrt, RGZM Mainz

Isabelle C. Kollig, Matthias J. J. Jacinto Fragata und Kurt W. Alt

Anthropologische Forschungen zum Byzantinischen Reich – ein Stiefkind der Wissenschaft?

TEIL 2 SCHAUPLÄTZE

KONSTANTINOPEL / ISTANBUL

Albrecht Berger

Konstantinopel – Gründung, Blüte und Verfall
einer mediterranen Metropole

Rudolf H. W. Stichel

Die Hagia Sophia Justinians, ihre liturgische Einrichtung
und der zeremonielle Auftritt des frühbyzantinischen
Kaisers

Helge Svenshon

Das Bauwerk als »aistheton soma« – eine Neuinter-
pretation der Hagia Sophia im Spiegel antiker
Vermessungslehre und angewandter Mathematik

Lars O. Grobe, Oliver Hauck und Andreas Noback

Das Licht in der Hagia Sophia – eine Computersimulation

Neslihan Asutay-Effenberger

Die justinianische Hagia Sophia: Vorbild oder Vorwand?

Örgü Dalgıç

The Corpus of Floor Mosaics from Istanbul

Stefan Albrecht

Vom Unglück der Sieger – Kreuzfahrer in Konstantinopel
nach 1204

Ernst Gamillscheg

Hohe Politik und Alltägliches im Spiegel
des Patriarchatsregisters von Konstantinopel

AGHIOS LOT / DEIR 'AIN 'ABATA

Konstantinos D. Politis

The Monastery of Aghios Lot at Deir 'Ain 'Abata
in Jordan

ANAIA / KADIKALESİ

Zeynep Mercangöz

Ostentatious Life in a Byzantine Province:
Some Selected Pieces from the Finds of the Excavation
in Kuşadası, Kadikalesi/Anaia (Prov. Aydın, TR)

Handan Üstündağ

Paleopathological Evidence for Social Status in a Byzan-
tine Burial from Kuşadası, Kadikalesi/Anaia: a Case of
»Diffuse Idiopathic Skeletal Hyperostosis« (DISH)

ANDRONA / AL ANDARIN

Christine Strube

Al Andarin, das antike Androna

Marlia Mundell Mango

Androna in Syria: Questions of Environment
and Economy

AMORIUM / HISARKÖY

Christopher S. Lightfoot

Die byzantinische Stadt Amorium:
Grabungsergebnisse der Jahre 1988 bis 2008

Eric A. Ivison

Kirche und religiöses Leben im byzantinischen
Amorium

Beate Böhlendorf-Arslan

Die mittelbyzantinische Keramik aus Amorium

Edward M. Schoolman

Kreuze und kreuzförmige Darstellungen
in der Alltagskultur von Amorium

Johanna Witte

Freizeitbeschäftigung in Amorium: die Spiele

CHERSON / SEWASTOPOL

Aleksandr Ajbabin

Das frühbyzantinische Chersonesos/Cherson

*Adam Rabinowitz, Larissa Sedikova
und Renata Henneberg*

Daily Life in a Provincial Late Byzantine City:
Recent Multidisciplinary Research in the Southern Region
of Tauric Chersonesos (Cherson)

Tatjana Jašaeva

Pilgerandenken im byzantinischen Cherson

EPHESOS / SELÇUK

Sabine Ladstätter

Ephesos in byzantinischer Zeit – das letzte Kapitel
der Geschichte einer antiken Großstadt

Andreas Külzer

Ephesos in byzantinischer Zeit – ein historischer Überblick

Andreas Pülz

Das Stadtbild von Ephesos in byzantinischer Zeit

Martin Steskal

Badewesen und Bäderarchitektur von Ephesos
in frühbyzantinischer Zeit

Gilbert Wiplinger

Die Wasserversorgung von Ephesos in byzantinischer
Zeit

Norbert Zimmermann

Die spätantike und byzantinische Malerei
in Ephesos

Johanna Auinger und Maria Aurenhammer

Ephesische Skulptur am Ende der Antike

Andrea M. Pülz und Feride Kat

Byzantinische Kleinfunde aus Ephesos –
ein Materialüberblick

Stefanie Wefers und Fritz Mangartz

Die byzantinischen Werkstätten von Ephesos

Manfred Koob, Mieke Pfarr und Marc Grellert

Ephesos – byzantisches Erbe des Abendlandes
Digitale Rekonstruktion und Simulation
der Stadt Ephesos im 6. Jahrhundert

IUSTINIANA PRIMA / CARIČIN GRAD

Vujadin Ivanišević

Caričin Grad – the Fortifications and the Intramural
Housing in the Lower Town

KRASEN

Valery Grigorov

The Byzantine Fortress »Krasen« near Panagyurishte

PERGAMON / BERGAMA

Thomas Otten

Das byzantinische Pergamon – ein Überblick
zu Forschungsstand und Quellenlage

Manfred Klinkott

Die byzantinischen Wehrmauern von Pergamon
als Abbild der politisch-militärischen Situationen
im westlichen Kleinasien

Sarah Japp

Byzantinische Feinkeramik aus Pergamon

TELANISSOS / QAL'AT SIM'AN

Jean-Luc Biscop

The Roof of the Octagonal Drum of the Martyrium
of Saint-Symeon

USAYS / ĞABAL SAYS

Franziska Bloch

Öllampenfunde aus dem spätantik-frühislamischen
Fundplatz Ğabal Says im Steppengürtel Syriens

TEIL 3 PERIPHERIE UND NACHBARSCHAFT

Franz Alto Bauer

Byzantinische Geschenkdiplomatie

DER NÖRDLICHE SCHWARZMEERRAUM

Elzara Chajredinova

Byzantinische Elemente in der Frauentracht der Krimgoten im 7. Jahrhundert

Rainer Schreg

Zentren in der Peripherie: landschaftsarchäologische Forschungen zu den Höhengründungen der südwestlichen Krim und ihrem Umland

DER UNTERE DONAURAUM

Andrey Aladzhov

The Byzantine Empire and the Establishment of the Early Medieval City in Bulgaria

Stanislav Stanilov

Der Pfau und der Hund: zwei goldene Zierscheiben aus Veliki Preslav

DER MITTLERE UND OBERE DONAURAUM

Jörg Drauschke

Halbmondförmige Goldohrringe aus bajuwarischen Frauengräbern – Überlegungen zu Parallelen und Provenienz

Péter Prohászka

Die awarischen Oberschichtgräber von Ozora-Tótipuszt (Kom. Tolna, H)

Falko Daim, Jérémie Chameroy, Susanne Greiff, Stephan Patscher, Peter Stadler und Bendeguz Tobias
Kaiser, Vögel, Rankenwerk – byzantinischer Gürteldekoration des 8. Jahrhunderts und ein Neufund aus Südungarn

Ádám Bollók

The Birds on the Braid Ornaments from Rakamaz: a View from the Mediterranean

Péter Langó

Crescent-shaped Earrings with Lower Ornamental Band

Miklós Takács

Die sogenannte Palmettenornamentik der christlichen Bauten des 11. Jahrhunderts im mittelalterlichen Ungarn

SKANDINAVIEN

John Ljungkvist

Influences from the Empire: Byzantine-related Objects in Sweden and Scandinavia – 560/570-750/800 AD

Unter diesem Banner erscheint im Jahr 2010 eine Reihe von Publikationen des Verlages des Römisch-Germanischen Zentralmuseums, die sich mit der Archäologie und Geschichte des Byzantinischen Reiches beschäftigen. Anlass ist die Ausstellung »Byzanz – Pracht und Alltag«, die vom 26. Februar bis zum 13. Juni 2010 in Bonn gezeigt wurde. Veranstaltet von der Kunst- und Ausstellungshalle der Bundesrepublik Deutschland wurde sie vom RGZM in Zusammenarbeit mit zahlreichen Fachkollegen konzipiert. Das RGZM setzt damit seine Forschungen im Bereich der Spätantike im Mittelmeerraum und des Byzantinischen Reiches fort, die bereits auf eine lange Tradition zurückblicken können und die in den letzten Jahren – nicht zuletzt durch einige Projekte, die zusammen mit Kooperationspartnern an Plätzen im Gebiet des Byzantinischen Reiches selbst durchgeführt werden – zu einem Schwerpunkt der Tätigkeiten des RGZM geworden sind.



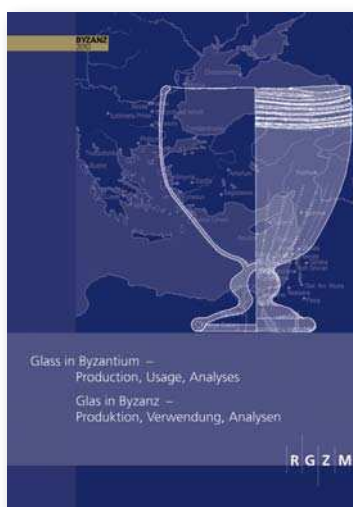
Falko Daim · Jörg Drauschke (Hrsg.)
Byzanz – das Römerreich im Mittelalter
Monographien des RGZM
Band 84, 1-3

Teil 1 Welt der Ideen, Welt der Dinge
507 S. mit 319 meist farb. Abb.
ISBN 978-3-88467-153-5
€ 90,–

Teil 2 Schauplätze
2 Bd., 922 S. mit 701 meist farb. Abb., 1 Falttaf.
ISBN 978-3-88467-154-2
€ 170,–

Teil 3 Peripherie und Nachbarschaft
451 S. mit 261 meist farb. Abb.
ISBN 978-3-88467-155-9
€ 80,–

Teil 1-3 zusammen € 295,–



Jörg Drauschke · Daniel Keller (Hrsg.)
Glas in Byzanz – Produktion, Verwendung, Analysen
RGZM Tagungen

Band 8
270 S. mit 200 Abb., 15 Farbtaf.
ISBN- 987-3-88467-147-4
€ 44,–



Mechthild Schulze-Dörrlamm
Byzantinische Gürtelschnallen und Gürtelbeschläge im RGZM

Teil 1: Die Schnallen ohne Beschläg, mit Laschenbeschläg und mit festem Beschläg des 5. bis 7. Jahrhunderts
 Kataloge Vor- und Frühgeschichtlicher Altertümer
 Band 30,1

2. Aufl., 268 S. mit 545 Abb., 4 Farbtaf.

ISBN 978-3-88467-134-4

€ 70,-



Mechthild Schulze-Dörrlamm
Byzantinische Gürtelschnallen und Gürtelbeschläge im RGZM

Teil 2 Die Schnallen mit Scharnierbeschläg und die Schnallen mit angegossenem Riemendurchzug des 7. bis 10. Jahrhunderts

Kataloge Vor- und Frühgeschichtlicher Altertümer
 Band 30,2 (2009)

414 S. mit 522 Abb., 2 Farbtaf., 1 Beil.

ISBN 978-3-88467-135-1

€ 98,-



Fritz Mangartz
Die byzantinische Steinsäge von Ephesos

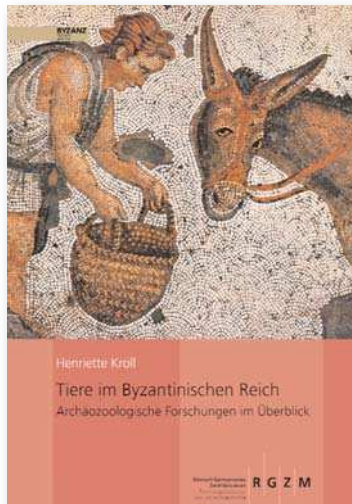
Monographien des RGZM

Band 86

122 S. mit 100 Abb., 23 Farbtaf.

ISBN 978-3-88467-149-8

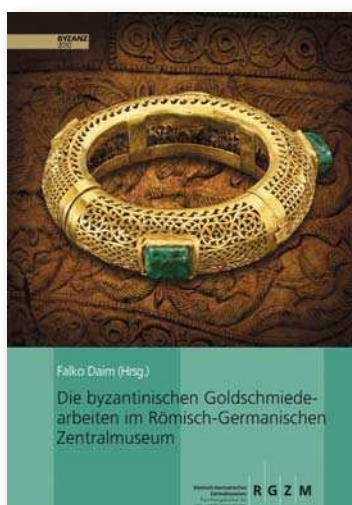
€ 45,-



Henriette Kroll
Tiere im Byzantinischen Reich
 Archäozoologische Forschungen im Überblick
 Monographien des RGZM
 Band 87
 306 S. mit 80 Abb.; 16 Farbtaf.
 ISBN 978-3-88467-150-4
 ca. 55,-€



Birgit Bühler
Der »Schatz« von Brestovac, Kroatien
 Monographien des RGZM
 Band 85
 ca. 400 S. mit 300 z.T. farbige Abb.
 ISBN 978-3-7954-2348-3
 ca. 120,-€



Falko Daim (Hrsg.)
**Die byzantinischen Goldschmiedearbeiten
 im Römisch-Germanischen Zentralmuseum**
 Kataloge Vor- und Frühgeschichtlicher Altertümer
 Band 42
 ca. 300 S. mit 650 meist farbigen Abb.
 ISBN 978-3-7954-2351-3